

Ime: _____

Občutki:



MATEMATIKA 1

Delovni list, ponovitev snovi prvih treh tednov
16. oktober 2025

1. Naj bosta $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^4$ enotska vektorja, za katera velja $\vec{x}^\top \vec{y} = 0$ in naj bo

$$A = 3\vec{x}\vec{x}^\top + 2\vec{y}\vec{y}^\top.$$

- A. Pokažite, da je matrika A simetrična.

- B. Izračunajte sled matrike A .

- C. Izračunajte Frobeniusovo normo matrike A .

- D. Pokažite, da je $\vec{x}$ lastni vektor matrike A . Pri kateri lastni vrednosti?

- E. Pokažite, da je $\vec{y}$ lastni vektor matrike A . Pri kateri lastni vrednosti?

- F. Določite rang matrike A .

G. Izračunajte determinanto matrike A .

H. Določite singularni razcep matrike A .

I. S pomočjo razcepa singularnih vrednosti matrike A še enkrat razmislite o odgovorih na A., B., C. in G.

J. Določite najboljši približek matrike A ranga 1 v Frobeniusovi normi.

2. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrika, ki ima realne lastne vrednosti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in naj bo $\vec{v}$ enotski lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti λ_1 .

A. Razmislite, kako bi konstruirali ortogonalno $n \times n$ matriko U , ki ima prvi stolpec enak $\vec{v}$.

B. Pokažite, da je prvi stolpec matrike $U^T A U$ enak $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$.

C. Pokažite, da ima desno spodnji $(n - 1) \times (n - 1)$ blok matrike $U^T A U$ lastne vrednosti $\lambda_2, \dots, \lambda_n$.

3. Za vektorja $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ in $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ pokažite, da velja $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \text{vec}(\mathbf{b}\mathbf{a}^T)$.

4. Naj bosta $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ in $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonalni matriki. Pokažite, da je tudi $A \otimes B$ ortogonalna.

5. Naj bo $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Zapišite primer takšne neničelne matrike $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, da bo imela matrika $A \otimes D$ vse lastne vrednosti z intervala $(-2, 2)$. Utemeljite, zakaj A ustreza tem pogojem.

6. Naj bosta $A = U_A \Sigma_A V_A^T$ in $B = U_B \Sigma_B V_B^T$ razcepa singularnih vrednosti matrik $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$.

A. Zapišite singularni razcep matrike $A \otimes B$.

B. Zapišite singularne vrednosti matrike $A \otimes B$.

C. Pokažite, da velja $\text{rang}(A \otimes B) = \text{rang}(A) \text{rang}(B)$.

7. Pokažite, da za poljubni matriki A in B velja $\|A \otimes B\|_F = \|A\|_F \|B\|_F$.