

2. kolokvij iz Matematike 1

14. januar 2026

Čas pisanja: **90 minut**. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 za pomoč. Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, pametnega telefona in ostalih elektronskih naprav je **strogo prepovedano**.

1. naloga (30 točk)

Homogeno telo z gostoto $\rho(x, y, z) = 1$ je določeno z neenačbami

$$z \leq 1 - x^2 - y^2, \quad z \geq x^2 + y^2 - 1 \quad \text{in} \quad x \geq 0.$$

a) (20 točk) Izračunaj maso tega telesa.

b) (10 točk) Izračunaj x koordinato težišča tega telesa.

(a) V valjnih koordinatah imamo $r^2 = x^2 + y^2$, zato $z \leq 1 - r^2$ in $z \geq r^2 - 1$.

$$\begin{aligned}
 M &= \iiint_D 1 \cdot dx dy dz = \int_0^\pi \left(\int_0^1 \left(\int_{r^2-1}^{1-r^2} r dz \right) dr \right) d\varphi = \pi \int_0^1 r(2-2r^2) dr = \\
 &\quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\
 &\quad g(x, y, z) \quad \quad \quad \det J_{\vec{F}} \\
 &= \pi \cdot \left(r^2 - \frac{r^4}{2} \right) \Big|_{r=0}^{r=1} = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad x^* &= \frac{1}{M} \iiint_D x \cdot 1 dx dy dz = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\int_0^1 \left(\int_{r^2-1}^{1-r^2} \underbrace{r \cos \varphi}_{x} \cdot \underbrace{r}_{\det J_{\vec{F}}} dz \right) dr \right) d\varphi =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{\pi} \underbrace{\left(\int_0^\pi \cos \varphi d\varphi \right)}_{=2} \left(\int_0^1 r^2 (2-2r^2) dr \right) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{2}{3} r^3 - \frac{2}{5} r^5 \right) \Big|_{r=0}^{r=1} = \frac{16}{15\pi}.
 \end{aligned}$$

2. naloga (35 točk)

Funkcija $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ima predpis

$$f(x, y, z) = xy e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)}$$

Poišči in klasificiraj vse stacionarne točke funkcije f .

Označimo $G = e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)}$. Velja $\frac{\partial G}{\partial x} = -xG$, $\frac{\partial G}{\partial y} = -yG$ in $\frac{\partial G}{\partial z} = -zG$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yG - x^2 y G = y(1 - x^2)G = 0 \quad \dots \quad y(1 - x^2) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xG - x y^2 G = x(1 - y^2)G = 0 \quad \dots \quad x(1 - y^2) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -xyzG = 0 \quad \dots \quad xyz = 0 \quad (3)$$

ker $G \neq 0$

iz (1): $y = 0$ ali $1 - x^2 = 0$

(2) ... $x = 0$

(3) ... z poljuben

$T(0, 0, z), z \in \mathbb{R}$

$x = \pm 1$

(2) ... $1 - y^2 = 0$

$y = \pm 1$

(3) ... $z = 0$

$T_{1,2,3,4}(\pm 1, \pm 1, 0)$

vse 4 kombinacije

$$H_f = \begin{bmatrix} -2xyG - xy(1-x^2)G & (1-x^2)G - y^2(1-x^2)G & -yz(1-x^2)G \\ (1-x^2)(1-y^2)G & -2xyG - xy(1-y^2)G & -xz(1-x^2)G \\ -yz(1-x^2)G & -xz(1-x^2)G & -xyG + xyz^2G \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} -xy(3-x^2) & (1-x^2)(1-y^2) & -yz(1-x^2) \\ (1-x^2)(1-y^2) & -xy(3-y^2) & -xz(1-x^2) \\ -yz(1-x^2) & -xz(1-x^2) & -xy(1-z^2) \end{bmatrix}$$

• $H_f(0, 0, z) = \frac{1}{\sqrt{e}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ← ta ima 2 nasprotno predznačeni lastni vrednosti, $T(0, 0, z)$ so sedlaste točke

• $H_f(\pm 1, \pm 1, 0) = \frac{1}{e} \begin{bmatrix} \pm 2 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 2 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{bmatrix}$ • Za $T_1(1, 1, 0)$ in $T_2(-1, -1, 0)$ je H_f PD, T_1 in T_2 sta minima.

↑ ↑ ↑
predznak se
vjemajo

• Za $T_3(-1, 1, 0)$ in $T_4(1, -1, 0)$ je H_f ND, T_3 in T_4 sta maksima.

3. naloga (35 točk)

Delec z maso m zaprt v kvader z robovi dolžin x , y in z ima energijo osnovnega stanja dano s formulo

$$E(x, y, z) = \frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{y^2} + \frac{2}{z^2} \right).$$

Ta kvader ima predpisano prostornino $V_0 = xyz = 8$, dolžine robov pa lahko izberemo. Določi dolžine robov, da bo energija osnovnega stanja minimalna.

Minimizirati želimo $E(x, y, z)$ pri pogoju $xyz = 8$ oz. $xyz - 8 = 0$.
 ↖ funkcija ↗ vez

Pripadajoča Lagrangeova funkcija je:

$$L(x, y, z, \lambda) = \frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{y^2} + \frac{2}{z^2} \right) - \lambda (xyz - 8).$$

Sistem nima rešitev, če $x=0$, $y=0$ ali $z=0$.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{\hbar^2}{4m} \cdot \frac{2}{x^3} - \lambda yz = 0 & \dots & \dots & \frac{\hbar^2}{2m\lambda} &= x^3 yz \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -\frac{\hbar^2}{4m} \cdot \frac{2 \cdot 4}{y^3} - \lambda xz = 0 & \dots & \dots & \frac{\hbar^2}{2m\lambda} &= y^3 xz \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= -\frac{\hbar^2}{4m} \cdot \frac{2 \cdot 2}{z^3} - \lambda xy = 0 & \dots & \dots & \frac{\hbar^2}{2m\lambda} &= z^3 xy \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x^3 yz &= \frac{y^3 xz}{4} \dots x^2 = \frac{y^2}{4} \quad (*) \\ y^3 xz &= \frac{z^3 xy}{2} \dots \frac{y^2}{4} = \frac{z^2}{2} \quad (**) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \dots xyz = 8 \quad (***)$$

saj $\lambda \neq 0$. (Če $\lambda = 0$, sistem nima rešitev.)

Iz (*) dobimo $y = 2x$, iz (**) in (*) pa $z = \sqrt{2} \cdot x$. (Upoštevamo le dolžine robov > 0 .)

To vstavimo v (***): $x^3 \cdot 2\sqrt{2} = 8 \dots x^3 = 2\sqrt{2} \dots$ $x = \sqrt{2}$.

$y = 2\sqrt{2}$.

$z = 2$.

Energija osnovnega stanja bo minimalna, če bo imel kvader robove dolžin $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ in 2 .