

1. kolokvij iz Matematike 1

26. november 2025

Čas pisanja: **90 minut**. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 za pomoč. Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, telefona in ostalih elektronskih naprav je **strogo prepovedano**.

1. naloga (30 točk)

Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ in } B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Opazujemo podmnožici V in W v vektorskem prostoru $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ vseh 2×2 matrik:

$$V := \{X \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : X^T A X \text{ je diagonalna matrika}\}$$

$$\text{in } W := \{Y \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : B^T Y B \text{ je diagonalna matrika}\}.$$

a) (20 točk) Ali je katera od podmnožic V in W vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{2 \times 2}$? Natančno utemelji!

Oglejmo si $X^T A X$ za $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$:

$$X^T A X = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -z \\ y & -w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 - z^2 & xy - zw \\ xy - zw & y^2 - w^2 \end{bmatrix}.$$

Da bo ta matrika diagonalna, mora veljati $xy - zw = 0$ (in to ni linearen pogoj). Matriki $X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ in $X_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ustrezata temu pogoju, matrika $X_1 + X_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ pa ne. V torej ni vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Vzemimo $Y_1, Y_2 \in W$, tj. $B^T Y_1 B$ in $B^T Y_2 B$ sta diagonalni matriki.

Torej: $\underbrace{B^T (\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2) B}_{\text{diagonalna matrika}} = \underbrace{\alpha_1 B^T Y_1 B + \alpha_2 B^T Y_2 B}_{\text{Vsota diagonalnih matrik je,}}$

Torej je W vektorski podprostor.

b) (10 točk) Za vsako od podmnožic V in W , ki je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, poišči bazo in določi dimenzijo.

Pišmo $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = B^T Y B$ (tj. $Y \in W$). Ker je B ortogonalna, je $Y = B D B^T = B \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} B^T$.

Baza za W je torej $\mathcal{B}_W = \{B \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B^T, B \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} B^T\}$ in $\dim(W) = 2$.

konkretno: $\mathcal{B}_W = \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

2. naloga (25 točk)

Dana je matrika

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

O simetrični matriki $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ vemo, da velja

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

in da je sled matrike A enaka $\text{tr}(A) = 3$.

Definirajmo še matriko

$$C = (A \otimes I)^2 - A \otimes B.$$

a) (5 točk) Določi lastne vrednosti matrik A in B .

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \dots \lambda_1 = 2, \text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 3, \lambda_2 = 1.$$

$$B \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \dots \mu_1 = 4, \text{tr}(B) = \mu_1 + \mu_2 = 2, \mu_2 = -2.$$

b) (5 točk) Naj bo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ lastni vektor matrike A , $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ pa lastni vektor matrike B . Pokaži, da je $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ lastni vektor matrike C .

$$\begin{aligned} \underbrace{(A \otimes I)^2 - A \otimes B}_C (\vec{u} \otimes \vec{v}) &= (A^2 \otimes I)(\vec{u} \otimes \vec{v}) - (A \otimes B)(\vec{u} \otimes \vec{v}) = \\ &= (A^2 \vec{u}) \otimes \vec{v} - (A \vec{u}) \otimes (B \vec{v}) = \\ &= \lambda^2 \vec{u} \otimes \vec{v} - (\lambda \vec{u}) \otimes (\mu \vec{v}) = (\lambda^2 - \lambda \mu) \vec{u} \otimes \vec{v}, \\ &\text{torej je } \vec{u} \otimes \vec{v} \text{ l.v. za } C \text{ z l.vred. } \lambda(\lambda - \mu). \end{aligned}$$

c) (5 točk) Izračunaj lastne vrednosti matrike C .

$$\begin{aligned} &\text{Vse možne kombinacije } \lambda(\lambda - \mu), \text{ kjer je } \lambda \text{ l.v. } A \text{ in } \mu \text{ l.v. } B: \\ &\lambda_1(\lambda_1 - \mu_1) = -4, \quad \lambda_2(\lambda_2 - \mu_1) = -3, \\ &\lambda_1(\lambda_1 - \mu_2) = 8, \quad \lambda_2(\lambda_2 - \mu_2) = 3. \end{aligned}$$

d) (10 točk) Poišči matriko M ranga 1, ki minimizira $\|C - M\|_F$.

Največja singularna (in lastna) vrednost C je 8, ki pripada singularnima vektorjema (oz. lastnemu vektorju) $\vec{u}_1 \otimes \vec{v}_2$.

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad \text{Torej } M = 8 \cdot (\vec{u}_1 \otimes \vec{v}_2)(\vec{u}_1 \otimes \vec{v}_2)^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

↑
ker je B simetrična, je $\vec{v}_2 \perp \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. naloga (20 točk)

Katera od matrik

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 10 & -7 \\ -2 & -7 & 9 \end{bmatrix}$$

je pozitivno definitna? Za vsako od matrik, ki je pozitivno definitna, poišči razcep Choleskega. Natančno utemelji!

Ker je $\det(A) = -10$, A ni pozitivno definitna.

Iz $4 > 0$, $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 40 - 4 > 0$ in $\det(B) = 144 > 0$ sledi, da je B pozitivno definitna po Sylvestrovem kriteriju.

Poiščimo razcep Choleskega za B :

$$L_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{4}} \cdot 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{4}} \cdot 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 10 & -7 \\ -7 & 9 \end{bmatrix} - \underbrace{\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{9} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{9}} \cdot (-6) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = 8 - \frac{1}{9} \cdot (-6) \cdot (-6) = 8 - 4 = 4$$

$$L_3 = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Torej } L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \text{ in } LL^T = B.$$

4. naloga (25 točk)

Definirajmo preslikavo $\phi: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ s predpisom

$$\phi(p) = \mathbf{a} [p(1), p'(1)],$$

kjer je $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

a) (7 točk) Preveri, da je ϕ linearna preslikava.

Vzemimo $p, q \in \mathbb{R}_2[x]$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tedaj:

$$\begin{aligned} \phi(\alpha p + \beta q) &= \vec{a} [(\alpha p + \beta q)(1), (\alpha p + \beta q)'(1)] = \\ &= \alpha \underbrace{\vec{a} [p(1), p'(1)]}_{\parallel} + \beta \underbrace{\vec{a} [q(1), q'(1)]}_{\parallel} \\ &= \alpha \phi(p) + \beta \phi(q), \text{ tj. } \phi \text{ je linearna.} \end{aligned}$$

b) (8 točk) Zapiši matriko, ki pripada ϕ glede na standardni bazi prostorov $\mathbb{R}_2[x]$ in $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

$$S_{\mathbb{R}_2[x]} = \{1, x, x^2\},$$

$$\phi(1) = \vec{a} [1, 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\phi(x) = \vec{a} [1, 1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\phi(x^2) = \vec{a} [1, 2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{matrix}$$

c) (10 točk) Poišči bazi za jedro $\ker \phi$ in sliko $\operatorname{im} \phi$.

$$A_\phi \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} B_{N(A_\phi)} &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \longleftrightarrow B_{\ker \phi} = \{x^2 - 2x + 1\}. \\ B_{C(A_\phi)} &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \longleftrightarrow B_{\operatorname{im} \phi} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$