

3. Računski izpit iz Matematike 1

25. avgust 2026

Čas pisanja: **90 minut**. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 za pomoč. Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, pametnega telefona in ostalih elektronskih naprav je **strogo prepovedano**.

1. naloga (25 točk)Naj bo A matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Preslikavi $\phi, \psi: \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ sta dani s predpisoma

$$\phi(p) = p(A + A^2) \quad \text{in} \quad \psi(p) = p(A) + A^2.$$

a) (5 točk) Ali sta preslikavi ϕ in ψ linearni? Za vsako od preslikav natančno utemelji zakaj je linearna oz. zakaj ne.

ψ ni linearna, saj $\psi(0) = A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Za ϕ pa velja: $\phi(\alpha p + \beta q) = (\alpha p + \beta q)(A + A^2) =$
 $= \alpha p(A + A^2) + \beta q(A + A^2) = \alpha \phi(p) + \beta \phi(q),$
 ϕ je torej linearna.

b) (10 točk) Za vsako od preslikav ϕ in ψ , ki je linearna, poišči matriko, ki ji pripada glede na standardni bazi prostorov $\mathbb{R}_3[x]$ in $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}_3[x]} = \{1, x, x^2, x^3\}$$

$$\phi(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi(x^2) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\phi(x) = A + A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi(x^3) = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

c) (10 točk) Določi bazi za jedro in sliko za vsako preslikavo (od ϕ in ψ), ki je linearna.

Na Gaussovi eliminaciji dobimo: $A_\phi \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Torej $\dim(N(A_\phi)) = 2$ z bazo $B_{A_\phi} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

Zato $B_{\ker \phi} = \{x^2 - 2x, x^3 - 4x\}$ in $B_{\text{im} \phi} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$

2. naloga (25 točk)

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) (10 točk) Brez računanja matrike $A \oplus A = A \otimes I + I \otimes A$ poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike $A \oplus A$.

b) (5 točk) Ali ima $A \oplus A$ razcep Choleskega? Če ga ima, ga poišči.

c) (10 točk) Poišči matriko A_1 ranga 1, ki minimizira vrednost $\|A \oplus A - A_1\|_F$.

(a) Matrika A je simetrična in ima (očitno) lastno vrednost $\lambda_1 = 3$ z lastnim vektorjem $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Za drugi lastni vektor lahko izberemo $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, ta pa ima lastno vrednost $\lambda_2 = -1$.

Matrika $A \oplus A$ ima za lastne vrednosti $\lambda_i + \lambda_j$ z lastnimi vektorji $\vec{v}_i \otimes \vec{v}_j$:

$$\begin{array}{l|l} \lambda_1 + \lambda_1 = 4 & \vec{v}_1 \otimes \vec{v}_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 2 & \vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2 \\ \lambda_2 + \lambda_1 = 2 & \vec{v}_2 \otimes \vec{v}_1 \\ \lambda_2 + \lambda_2 = -2 & \vec{v}_2 \otimes \vec{v}_2 \end{array}$$

(b) Ker ima $A \oplus A$ negativno lastno vrednost $\lambda_2 + \lambda_2 = -2$, ni pozitivno definitna, torej nima razcepa Choleskega.

(c) $\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$... vzemimo $\vec{g}_1 = \frac{\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_1\|} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Po Eckart-Youngovem izreku je:

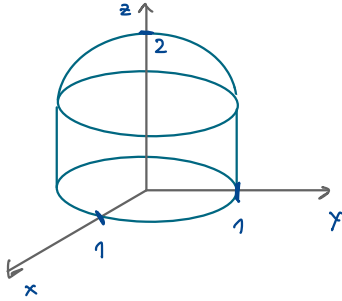
$$A_1 = (\lambda_1 + \lambda_1) \vec{g}_1 \vec{g}_1^T = \frac{4}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. naloga (25 točk)

Telo T v $\mathbb{R}^3$ je dano z neenačbami

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad z \geq 0.$$

Določi prostornino in koordinate masnega središča tega telesa, če je telo homogeno (tj. gostota je konstantna; $\rho(x, y, z) = 1$).



V valjnih koordinatah imamo:

$$r^2 + z^2 \leq 2, \quad r^2 \leq 1, \quad z \geq 0$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$0 \leq z \leq \sqrt{2-r^2} \qquad 0 \leq r \leq 1$$

Torej:

$$V = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{2-r^2}} r \, dz \right) dr \right) d\varphi = 2\pi \int_0^1 r \sqrt{2-r^2} \, dr \stackrel{\substack{t=2-r^2 \\ dt = -2r \, dr}}{=} 2\pi \int_2^1 \sqrt{t} \cdot \left(-\frac{dt}{2}\right) =$$

$$= \pi \int_1^2 t^{1/2} \, dt = \pi \cdot \frac{2}{3} t^{3/2} \Big|_{t=1}^{t=2} = \frac{2\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

$$z^* = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{2-r^2}} z \cdot r \, dz \right) dr \right) d\varphi \stackrel{u=V}{=} \frac{3}{2\pi(2\sqrt{2}-1)} \cdot 2\pi \int_0^1 \left(r \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_{z=0}^{z=\sqrt{2-r^2}} \right) dr =$$

$$= \frac{3}{2(2\sqrt{2}-1)} \int_0^1 r(2-r^2) \, dr = \frac{3}{2(2\sqrt{2}-1)} \cdot \left(r^2 - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_{r=0}^{r=1} =$$

$$= \frac{9}{8(2\sqrt{2}-1)}.$$

Iz simetrije sledi $x^* = 0$ in $y^* = 0$.

4. naloga (25 točk)

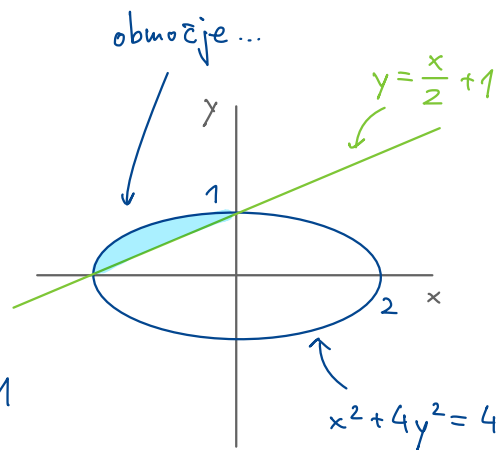
Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije

$$f(x, y) = x + 2y$$

pri pogojih

$$x^2 + 4y^2 \leq 4 \text{ in } x \leq 2y - 2.$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} \leq 1 \quad y \geq \frac{x}{2} + 1$$



Ekstremi v notranjosti :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \quad \dots \text{ni kandidotov.}$$

Ekstremi na robu:

(1) z enačbo $x = 2y - 2 \dots x - 2y + 2 = 0.$

$$L(x, y, \lambda) = x + 2y - \lambda(x - 2y + 2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 - \lambda = 0 \dots \lambda = 1 \leftarrow$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2 + 2\lambda = 0 \dots \lambda = -1 \leftarrow$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \dots$$

!! Na $\lambda = 1$ ni kandidotov.

(2) z enačbo $x^2 + 4y^2 = 4 \dots x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ (in $x \leq 0, y \geq 0$).

$$L(x, y, \lambda) = x + 2y - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 - 2x\lambda = 0 \dots \lambda = \frac{1}{2x} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial y} = 2 - 8y\lambda = 0 \dots \lambda = \frac{1}{4y} \end{array} \right\} 2x = 4y \dots x = 2y$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2 - 8y\lambda = 0 \dots \lambda = \frac{1}{4y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x^2 + 4y^2 - 4) = 0 \dots 4y^2 + 4y^2 = 4 \dots 2y^2 = 1 \dots y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \dots x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ne ustreza

Tudi na $\lambda = 1$ ni kandidotov

(3) Še vogalni točki $(x, y) = (-2, 0)$ in $(x, y) = (0, 1)$:

$$f(-2, 0) = -2, \quad f(0, 1) = 2$$

↑
najmanjša vrednost

↑
največja vrednost