Ime in priimek: ____________________ Vpisna številka: ____________________

IZPIT IZ MATEMATIKE 1, TEORETIČNI DEL

25. avgust 2026

Vse naloge je treba v celoti utemeljiti, razen v primeru, ko je navedeno drugače.

1. **(10 točk)** Naj bo $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ enotski vektor. Izračunajte Frobeniusovo normo $\|I_n - \vec{u}\,\vec{u}^{\mathsf{T}}\|_F$.

$$\|I_n - \vec u\vec u^T\|_F^2 = tr\big((I_n-\vec u\vec u^T)\underbrace{(I_n-\vec u\vec u^T)^T}_{\text{simetrična}}\big) =$$

$$= tr\big((I_n-\vec u\vec u^T)(I_n-\vec u\vec u^T)\big) =$$

$$= tr\big(I_n - \vec u\vec u^T - \vec u\vec u^T + \vec u\underbrace{\vec u^T\vec u}_{\|\vec u\|^2 = 1^2 = 1}\vec u^T\big) =$$

+ asociativnost matričnega množenja

se izničita

$$= tr(I_n - \vec u\vec u^T) =$$

linearnost sledi $= tr(I_n) - tr(\vec u\vec u^T) =$

isti argument

$$= n - tr(\underbrace{\vec u^T\vec u}_{=1}) = n-1 \quad \Rightarrow \|I_n - \vec u\vec u^T\|_F = \sqrt{n-1}$$

2. **(15 točk)** Naj bodo $\tau, \varphi, \psi \colon V \to V$ linearne preslikave vektorskega prostora V.

A. Če velja $\tau^2 = 0$, pokažite, da so vse lastne vrednosti preslikave τ enake 0.

$\tau(v) = \lambda v$, $v \neq 0$, $v \in V$ $\Rightarrow \underbrace{\tau^2(v)}_{\overset{\shortparallel}{0}\ \forall v} = \lambda^2 v \Rightarrow \underbrace{\lambda^2}_{\in\mathbb{R}} \underbrace{v}_{\substack{\in V\\ \neq 0}} = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

B. Naj bo $V = \mathbb{R}_4[x]$. Napišite primer linearne preslikave φ, ki ima vse lastne vrednosti enake 0, vendar je $\varphi^2 \neq 0$. Za izbrano preslikavo φ utemeljite ti dve lastnosti.

npr. $\varphi(p) = p'$ $\quad (\varphi(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e) = 4ax^3+3bx^2+2cx+d)$

- $\varphi^2(p) = p''$ in $\varphi^2(x^4) = 12x^2 \neq 0$
- $\varphi(p) = \lambda p$ za nek $p \neq 0$ $\Rightarrow \underbrace{p'}_{\text{stopnje } d-1} = \underbrace{\lambda p}_{\text{stopnje } d \leq 4}$

$\Rightarrow d = 0 \Rightarrow p = 0$

C. Privzemite, da je $V = \mathbb{R}_4[x]$. Napišite primer neničelne linearne preslikave ψ, ki preslika standardno bazo prostora V v linearno odvisno množico.

npr. $\psi = \varphi$ iz B.

3. **(20 točk)** Naj bosta $\mathcal{A} = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \,:\, X^\mathsf{T} = -X\}$ in $\mathcal{B} = \{X \in \mathbb{R}^{m\times m} \,:\, X^\mathsf{T} = X\}$.

A. Pokažite, da je $\mathcal{A}$ vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^{n\times n}$.

$X, Y \in \mathcal{A} \Rightarrow X^T = -X$ in $Y^T = -Y$

$$(\alpha X + \beta Y)^T = \alpha X^T + \beta Y^T = -\alpha X - \beta Y = -(\alpha X + \beta Y)$$

$$\Rightarrow \alpha X + \beta Y \in \mathcal{A}$$

B. Če sta $X, Y \in \mathcal{A}$, dokažite, da velja $X \otimes Y \in \mathcal{B}$.

$$(X \otimes Y)^T = X^T \otimes Y^T = (-X) \otimes (-Y) = +(X \otimes Y) \Rightarrow X \otimes Y \in \mathcal{B}$$

C. Privzemite, da je $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva matrika in naj bo $Z = CC^\mathsf{T}$. Ali obstaja razcep Choleskega matrike $I \otimes Z$? Če obstaja, izračunajte razcep in utemeljite svoj izračun. Če ne obstaja, pojasnite, zakaj ne.

$Z = CC^T \Rightarrow Z$ je PD $\Rightarrow Z$ ima razcep Choleskega $Z = LL^T$, L sp Δ,

$$I \otimes Z = (II^T) \otimes (LL^T) = (I \otimes L)(I^T \otimes L^T) =$$

obrnljiva

$\Rightarrow I \otimes Z$ obrnljiva

lastnost ? s predavanj

$$= \underbrace{(I \otimes L)}_{\text{sp }\Delta}(I \otimes L)^T$$ ← to je razcep Choleskega

$$I \otimes L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \otimes L = \begin{bmatrix} L & & & \\ & L & & \\ & & L & \\ & & & \ddots \\ & & & & L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta & & & \\ & \Delta & & \\ & & \Delta & \\ & & & \ddots \\ & & & & \Delta \end{bmatrix} \text{ sp. } \Delta$$

D. Napišite primer nesimetričnih matrik $\overbrace{X \in \mathbb{R}^{3\times 3}}^{\in \mathcal{A}}$ in $Y \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, za kateri je $X \otimes Y$ pozitivno definitna in velja $\|X \otimes Y\|_F \leq 4$. Utemeljitev ni potrebna.

$X \otimes Y \in \mathcal{B}$

po delu B.

recimo:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\varepsilon} & \boxed{-\varepsilon} & \boxed{0} \\ \boxed{\varepsilon} & \boxed{\varepsilon} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{\varepsilon} \end{bmatrix} \in \mathcal{A} \qquad B = \begin{bmatrix} \boxed{\varepsilon} & \boxed{\varepsilon} \\ \boxed{-\varepsilon} & \boxed{\varepsilon} \end{bmatrix} \in \mathcal{A}$$

za dovolj majhen ε.

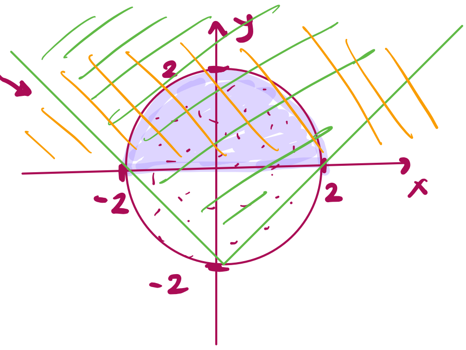
4. **(15 točk)** Naj bo

$$\mathcal{D} = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0,\ y \geq |x| - 2\}.$$

Jasno narišite $\mathcal{D}$ in izrazite

$$\iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y)\, dx\, dy$$

kot integral v polarnih koordinatah. (Integrala ne izračunajte.)



$0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq 2$

det Jacobijeve matrike polarnih koordinat

$$\iint_{\mathcal{D}} (x^2+y)\, dx\, dy = \int_0^{\pi} \left(\int_0^2 (r^2 \sin^2\varphi + r\cos\varphi)\, r\, dr \right) d\varphi$$

5. **(10 točk)** Naj bo

$$f(x,y) = x^2 e^y - \ln(1+y).$$

Določite, ali je v okolici točke $(0,0)$ funkcija f konveksna, konkavna ali nič od tega.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x e^y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^y - \frac{1}{1+y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x e^y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^y + \frac{1}{(1+y)^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 1$

$\Rightarrow H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ je PD $\Rightarrow f$ je v $(0,0)$ konveksna.

6. **(15 točk)** Naj bo $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ in naj bo $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pozitivno definitna matrika. Opazujemo optimizacijski problem

$A=B$

$$\min_{\vec{x}\in\mathbb{R}^n} \left(\| \vec{x} \|_2^2 - \vec{x}^{\mathsf{T}} A \vec{x} \right)$$

pri pogoju

$$1 \leq \| \vec{x} \|_2 \leq 2.$$

$1-\|\vec{x}\| \leq 0$ (ali $1-\|\vec{x}\|^2 \leq 0$)

$\|\vec{x}\|-2 \leq 0$ (ali $\|\vec{x}\|^2-4 \leq 0$)

A. Zapišite Lagrangeevo funkcijo tega problema.

$L(\vec{x},\mu_1,\mu_2) = \|\vec{x}\|^2 - \vec{x}^T A \vec{x} - \mu_1 (1-\|\vec{x}\|^2) - \mu_2 (\|\vec{x}\|^2 - 4)$

B. Zapišite prirejeni problem omenjenega problema.

$K(\mu_1,\mu_2) = \inf_{\vec{x}} L(\vec{x},\mu_1,\mu_2)$

prirejeni problem: $\max K(\mu_1,\mu_2)$

p.p. $\mu_1 \leq 0$

$\mu_2 \leq 0$

C. Zapišite Karush–Kuhn–Tuckerjeve pogoje tega problema.

$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = 2\vec{x}^T - 2\vec{x}^T A + 2\mu_1 \vec{x}^T - 2\mu_2 \vec{x}^T = 2\vec{x}^T((1+\mu_1-\mu_2)I - A)$

- $((1+\mu_1-\mu_2)I - A)\vec{x} = \vec{0}$
- $1 \leq \|\vec{x}\|^2 \leq 4$
- $\mu_1 \leq 0, \mu_2 \leq 0$
- $\mu_1(1-\|\vec{x}\|^2) = 0$
- $\mu_2(\|\vec{x}\|^2 - 4) = 0$