

Ime in priimek:

Polona

Vpisna številka:

	naloge 1-3 (x)	naloge 4-8 (y)	Skupaj (max{0,x} + y)
točke	32	70	102

IZPIT IZ MATEMATIKE 1, TEORETIČNI DEL

13. februar 2025

Pri vsaki od nalog 1.-3. obkrožite vse pravilne odgovore in odgovorite na podvprašanja. Za vsak pravilno obkrožen odgovor boste dobili 4 točke, za vsak napačno obkrožen odgovor pa -2 točki. Pri teh nalogah odgovorov ni potrebno utemeljevati.

1. Katere od naslednjih množic so vektorski prostori?

A. ravnina $x + y + z = 3$ v $\mathbb{R}^3$

☒ B. premica $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$ v $\mathbb{R}^3$

C. premica $x = y = z + 1$ v $\mathbb{R}^3$

☒ D. vse matrike velikosti 20×25

☒ E. vse 4×4 matrike z ničelno sledjo

F. vse obrnljive matrike velikosti 6×6

☒ G. vse 4×4 matrike, ki imajo vse diagonalne elemente enake 0

H. vse 2×5 matrike, ki imajo Frobeniusovo normo enako 1

I. vsi polinomi stopnje največ 5, katerih odvod je enak $2x + 1$

J. vsi polinomi stopnje največ 5, katerih odvod je enak $2x$

2. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ pozitivno definitna matrika in $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ negativno definitna matrika. Za katere od naslednjih matrik gotovo obstaja razcep Choleskega?

A. $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

G. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

☒ B. A

E. $A + B$

H. AB

C. B

☒ F. B^2

☒ I. $-A \otimes B$

3. Želimo poiskati vse vektorje $\vec{x} \in \mathbb{R}^{2025}$ dolžine 45, katerih skalarni produkt z vektorjem $\vec{a} = [1, 1, \dots, 1]^T$ je najmanjši možen. Dovolj je poiskati stacionarne točke neke funkcije več spremenljivk. Katere? $\|\vec{x}\| = 45$
 $\min \vec{a}^T \vec{x}$

A. $F(\vec{x}) = \vec{a}^T \vec{x}$

D. $F(\vec{x}, \lambda) = \|\vec{x}\|^2 - \lambda(\vec{a}^T \vec{x})$

B. $F(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^2 45^2$

☒ E. $F(\vec{x}, \lambda) = \vec{a}^T \vec{x} - \lambda(\|\vec{x}\| - 45)$

C. $F(\vec{x}, \lambda) = \|\vec{x}\| - 45 - \lambda(\vec{a}^T \vec{x})$

F. nobena od naštetih

Pri vsaki od nalog 4.-8. dobro utemeljite vse svoje odgovore in korake pri sklepanju. Za odgovore brez utemeljitev ne boste prejeli točk.

4. (20 točk) Naj bo $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

A. Ali obstajata ortogonalna matrika U in diagonalna matrika D , da bo $M = UDU^T$? Če da, ju zapišite. Če ne, utemeljite, zakaj ne.

$$M = 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{ortog } U} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{ortog } U^T}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

B. Izračunajte Frobeniusovo normo matrike M .

$$\|M\|_F = \|D\|_{\text{iz}(A)} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

C. Zapišite neobrnljivo matriko N , ki je najbližje matriki M v Frobeniusovi normi.

$$M = UDU^T$$

$$N = U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} U^T = \begin{pmatrix} 0 & 8/\sqrt{2} \\ 0 & 8/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8/\sqrt{2} & 4 \\ 8/\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

D. Ali obstaja nedefinitna matrika A , da velja $A^2 = M$?

$$M = U \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} U^T$$

$$A = U \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \sqrt{8} \end{pmatrix} U^T$$

$$(A^2 = UDU^TUDU^T = UD^2U^T = U \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} U^T = M)$$

5. (10 točk) Naj bo $\mathcal{N}$ množica vseh matrik X , za katere velja $XX^T = X^T X$. Pokažite, da če sta matriki A in B iz množice $\mathcal{N}$, potem je tudi njun Kroneckerjev produkt $A \otimes B$ v množici $\mathcal{N}$.

$$A, B \in \mathcal{N} \Rightarrow AA^T = A^T A \quad \text{in} \quad BB^T = B^T B$$

Ali $A \otimes B \in \mathcal{N}$?

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(A \otimes B)^T &= (A \otimes B)(A^T \otimes B^T) = \\ &= (AA^T) \otimes (BB^T) = \\ &\stackrel{A, B \in \mathcal{N}}{=} A^T A \otimes B^T B = (A^T \otimes B^T)(A \otimes B) = \\ &= (A \otimes B)^T (A \otimes B) \Rightarrow A \otimes B \in \mathcal{N} \end{aligned}$$

6. (15 točk) Zapišite vsoto dveh dvakratnih integralov

$$\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{-x}^x x dy \right) dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x dy \right) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^2 r \cdot r \cos \varphi \, dr \right) d\varphi$$

Jacobi za polane

v polarnih koordinatah (na desni strani). Izpolnite vseh sedem pravokotnikov, a integrala ne računajte. Spodaj narišite sliko in utemeljite vse korake.

Glej 1. izpit.

$$0 \leq x \leq \sqrt{2}$$

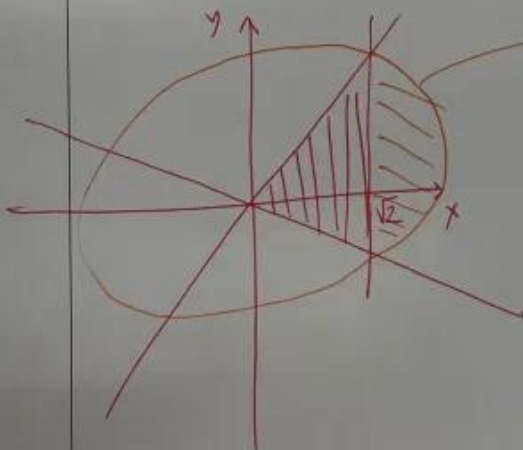
$$-x \leq y \leq x$$

$$\sqrt{2} \leq x \leq 2$$

$$-\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$$

$$y^2 \leq 4-x^2$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 \leq 4$$



7. (10 točk) Ali je funkcija $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, podana s predpisom $f(x,y) = \log(x) + xe^y$, konkavna v točki $(1,1)$? NE

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{x} + e^y & f_{xx} &= -\frac{1}{x^2} \\ f_y &= xe^y & f_{xy} &= e^y = f_{yx} \\ & & f_{yy} &= xe^y \end{aligned}$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & e^y \\ e^y & xe^y \end{pmatrix}$$

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & e \\ e & e \end{pmatrix} \quad \det H_f(1,1) = -e - e^2 < 0 \Rightarrow \text{nedefinitna} \Rightarrow \text{NI konkavna}$$

8. (15 točk) Želimo poiskati vse vektorje $\vec{x} \in \mathbb{R}^{2025}$ dolžine vsaj 45, katerih skalarni produkt z vektorjem $\vec{a} = [1, 1, \dots, 1]^T$ je najmanjši možen. min $\vec{a}^T \vec{x}$

Zapišite Lagrangevo funkcijo L zgornjega problema.

p.p. $\|\vec{x}\| \leq 45 \quad (\|\vec{x}\|^2 \leq 45^2)$

$$L(\vec{x}, \lambda) = \vec{a}^T \vec{x} - \lambda (\|\vec{x}\|^2 - 45^2)$$

$$- \lambda (\|\vec{x}\| - 45)$$

Zapišite Karush-Kuhn-Tuckerjev sistem zgornjega problema.

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = \vec{a}^T - 2\lambda \vec{x}^T = 0 \quad \leftarrow$$

$$\|\vec{x}\|^2 \leq 45^2$$

$$\lambda \leq 0$$

$$\lambda (\|\vec{x}\|^2 - 45^2) = 0$$