
Ime in priimek

2. Računski izpit iz Matematike 1

12. februar 2026

Čas pisanja: **90 minut**. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 za pomoč. Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, pametnega telefona in ostalih elektronskih naprav je **strogo** prepovedano.

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Naj bosta $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{3}[2, 2, 1]^T$ in $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{3}[-2, 1, 2]^T$. Definirajmo matrike

$$A = 2\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T - \mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

in

$$C = (A \otimes B)^2 + A \otimes I_2 + I_3 \otimes B.$$

a) (5 točk) Določi lastne vrednosti matrik A in B .

Rešitev : Ker sta $\mathbf{u}_1$ in $\mathbf{u}_2$ ortonormirana vektorja, je definicija matrike A že njen spektralni razcep. Lastna vektorja sta jasno $\mathbf{u}_1$ in $\mathbf{u}_2$ za lastni vrednosti $\lambda_1 = 2$ in $\lambda_2 = -1$ (lahko tudi direktno vidimo, da velja $A\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{u}_1$ in $A\mathbf{u}_2 = -\mathbf{u}_2$). Tretja lastna vrednost je očitno $\lambda_3 = 0$ (lastni vektor pa ortogonalen na $\mathbf{u}_1$ in $\mathbf{u}_2$).

Za matriko B lahko lastni vrednosti določimo s pomočjo karakterističnega polinoma, ali pa opazimo, da je vsota elementov po vrsticah enaka 1. To pomeni, da je $\mathbf{v}_1 = [1, 1]^T$ lastni vektor z lastno vrednostjo $\mu_1 = 1$. Ker je $\text{tr}(A) = -2 = \mu_1 + \mu_2$, lahko dobimo še drugo lastno vrednost $\mu_2 = -3$ (lastni vektor pa je ortogonalen na prvega, ker je matrika simetrična, torej $\mathbf{v}_2 = [1, -1]^T$).

b) (8 točk) Naj bo $\mathbf{v}$ lastni vektor matrike A in $\mathbf{w}$ lastni vektor matrike B . Pokaži, da je $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ lastni vektor matrike C .

Rešitev : Naj bo $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ in $B\mathbf{w} = \mu\mathbf{w}$. Z uporabo lastnosti Kroneckerjevega produkta lahko direktno poračunamo

$$\begin{aligned} C(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) &= ((A \otimes B)^2 + A \otimes I_2 + I_3 \otimes B)(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) \\ &= ((A^2 \otimes B^2)(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) + (A \otimes I_2)(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) + (I_3 \otimes B)(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})) \\ &= A^2\mathbf{v} \otimes B^2\mathbf{w} + A\mathbf{v} \otimes I_2\mathbf{w} + I_3\mathbf{v} \otimes B\mathbf{w} \\ &= \lambda^2\mu^2(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) + \lambda(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) + \mu(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) \\ &= (\lambda^2\mu^2 + \lambda + \mu)(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) \end{aligned}$$

c) (6 točk) Brez računanja matrike C izračunaj lastne vrednosti matrike C .

Rešitev : Pri izračunu v prejšnji točki smo na koncu dobili formulo, s katero lahko izračunamo lastne vrednosti matrike C iz lastnih vrednosti matrik A in B .

$$\begin{array}{c|ccc} \mu \backslash \lambda & 2 & -1 & 0 \\ \hline -3 & 35 & 5 & -3 \\ 1 & 7 & 1 & 1 \end{array}$$

d) (6 točk) Poišči matriko C_1 ranga 1, ki minimizira Frobeniusovo normo $\|C - C_1\|_F$. (Matrike C_1 ni potrebno do konca izračunati, dovolj jo je izraziti z ustreznim lastnim vektorjem matrike C , ki pa ga je potrebno izračunati.)

Rešitev : Največjo lastno (in tudi singularno) vrednost 35 matrike C smo dobili pri paru $\lambda = 2$, $\mu = -3$, in ustreza lastnemu vektorju

$$\mathbf{q} = \mathbf{u}_1 \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Matriko C_1 lahko potem izrazimo kot

$$C_1 = 35 \cdot \mathbf{q}\mathbf{q}^T$$

2. naloga (25 točk)

Označimo z $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ vektorja $\mathbf{u} = [1, x]^T$ in $\mathbf{v} = [x, x^2]^T$. Definirajmo preslikavo $\phi: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ s predpisom

$$\phi(A) = \mathbf{u}^T A \mathbf{v}.$$

a) (5 točk) Pokaži, da je ϕ linearna preslikava.

Rešitev : Po definiciji in lastnostih matričnega množenja lahko zapišemo

$$\phi(\alpha A + \beta B) = \mathbf{u}^T (\alpha A + \beta B) \mathbf{v} = \alpha \mathbf{u}^T A \mathbf{v} + \beta \mathbf{u}^T B \mathbf{v} = \alpha \phi(A) + \beta \phi(B)$$

kar velja za poljubni matriki $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ in števili $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) (10 točk) Poišči matriko, ki pripada ϕ glede na standardni bazi $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ in $\mathbb{R}_3[x]$.

Rešitev : Poračunamo vrednosti preslikave ϕ za standardne bazne matrike $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$.

$$\begin{aligned}\phi(E_{11}) &= x \\ \phi(E_{12}) &= x^2 \\ \phi(E_{21}) &= x^2 \\ \phi(E_{22}) &= x^3\end{aligned}$$

Matriko M , ki pripada ϕ v standardnih bazah lahko tako zapišemo kot

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) (10 točk) Poišči bazi za $\ker \phi$ in $\operatorname{im} \phi$.

Rešitev : Po Gaussovi eliminaciji imamo

$$M \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dimenzija jedra $\ker \phi$ je enaka 1, dimenzija slike $\operatorname{im} \phi$ pa je enaka 3. Baza za $\ker \phi$ je $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, baza za $\operatorname{im} \phi$ pa $\{x, x^2, x^3\}$.

3. naloga (25 točk)

Izračunaj maso in z -koordinato težišča homogenega obroča (z gostoto $\rho = 1$), ki je podan z neenačbami

$$z^2 + 1 \leq x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 5, \quad z \geq 0.$$

Rešitev : Smiselno je uporabiti cilindrične koordinate. Neenačbe, ki določajo območje, lahko potem zapišemo kot

$$z^2 + 1 \leq r^2, \quad r^2 + z^2 \leq 5, \quad z \geq 0.$$

Pogoja za polarni kot ϕ ni, torej $\phi \in [0, 2\pi]$. Presek ploskev $z^2 + 1 = r^2$ in $r^2 + z^2 = 5$ je pri $z = \sqrt{2}$ (če upoštevamo še $z \geq 0$) in $r = \sqrt{3}$. Pri dani vrednosti $z \in [0, \sqrt{2}]$ imamo $r \in [\sqrt{z^2 + 1}, \sqrt{5 - z^2}]$ (pomaga tudi skica). En način, da izračunamo maso je torej

$$\begin{aligned} m &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{\sqrt{2}} \int_{r=\sqrt{z^2+1}}^{\sqrt{5-z^2}} r \, dr \, dz \, d\phi \\ &= 2\pi \int_{z=0}^{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \left((5 - z^2) - (z^2 + 1) \right) dz \\ &= 2\pi \int_{z=0}^{\sqrt{2}} 2 - z^2 \, dz = \frac{8\sqrt{2}\pi}{3} \end{aligned}$$

Za z -koordinato težišča dobimo

$$\begin{aligned} z^* &= \frac{1}{m} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{\sqrt{2}} \int_{r=\sqrt{z^2+1}}^{\sqrt{5-z^2}} rz \, dr \, dz \, d\phi \\ &= \frac{2\pi}{m} \int_{z=0}^{\sqrt{2}} 2z - z^3 \, dz \\ &= \frac{2\pi}{m} = \frac{3}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

4. naloga (25 točk)

Naj bosta m in n naravni števili, za kateri velja $n \geq m$. Dana sta vektorja $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ in $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$ in matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ polnega ranga ($\text{rang}(A) = m$). Poišči $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, pri katerem funkcija

$$f(\mathbf{x}) = \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$$

doseže minimalno vrednost pri pogoju

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} = 1.$$

Rešitev : Da je bolj očitno, kako odvajati f je lahko koristno, da zapišemo

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^T A^T - \mathbf{b}^T)(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) = \mathbf{x}^T A^T A \mathbf{x} - 2\mathbf{b}^T A \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{b}$$

(kjer upoštevamo, da je $\mathbf{x}^T A^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T A \mathbf{x}$). Lagrangeva funkcija je

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda(\mathbf{c}^T \mathbf{x} - 1)$$

Enačba za ekstrem je

$$L_{\mathbf{x}} = 2\mathbf{x}^T A^T A - 2\mathbf{b}^T A - \lambda \mathbf{c}^T = 0$$

Če enačbo transponiramo in upoštevamo, da je $A^T A$ obrnljiva matrika (ker je A polnega ranga), lahko izrazimo

$$\mathbf{x} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} + \frac{\lambda}{2} (A^T A)^{-1} \mathbf{c}$$

Koeficient λ lahko izrazimo, če to enačbo z leve pomnožimo z $\mathbf{c}^T$ in upoštevamo $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = 1$. Dobimo

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{1 - \mathbf{c}^T (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}}{\mathbf{c}^T (A^T A)^{-1} \mathbf{c}}$$

kar lahko vstavimo v enačbo za $\mathbf{x}$ za končno rešitev.