

## Večkratni integrali

Polona Oblak

## 1. DVOJNI INTEGRAL NA PRAVOKOTNIKU

Formalno definiramo dvojni integral

$$\iint_R f(x, y) \, dx dy,$$

funkcije  $f: R \rightarrow \mathbb{R}$  na pravokotniku  $R = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$  na naslednji način. Najprej razdelimo pravokotnik  $R$  na  $mn$  manjših pravokotničkov  $R_{ij}$  s stranicama dolžin  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  ter  $\Delta y = \frac{d-c}{m}$ . V vsakem pravokotničku  $R_{ij}$  izberemo poljubno točko  $(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ . Prostornina telesa pod grafom  $z = f(x, y)$  nad pravokotnikom  $R_{ij}$  je tako približno enaka

$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y.$$

*Dvojni integral funkcije  $f$  na pravokotniku  $R = [a, b] \times [c, d]$  tako definiramo kot*

$$\iint_R f(x, y) \, dx dy = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y,$$

če ta limita obstaja.

Izkaže se, da je integral  $\iint_R f(x, y) \, dx dy$  neodvisen od izbire točke  $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in R_{ij}$ . Če je  $f$  nenegativna funkcija, je  $\iint_R f(x, y) \, dx dy$  enak prostornini telesa, ki je omejen s pravokotnikom  $R$  ter grafom  $z = f(x, y)$ .

**Izrek 1** (Fubini). Če je  $f: R \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija na pravokotniku  $R = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ , potem

$$\iint_R f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx.$$

## 2. DVOJNI INTEGRAL

Če je  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  neko omejeno območje ter  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija, izberimo tak pravokotnik  $R$ , da velja  $D \subseteq R$ . Sedaj definiramo *dvojni integral funkcije  $f$  na območju  $D$*  kot

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_R F(x, y) \, dx dy,$$

kjer

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Sedaj lahko zapišimo tudi Fubinijev izrek za nepravokotna območja.

**Izrek 2 (Fubini).** (1) Če je  $D = \{(x, y); a \leq x \leq b \text{ in } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2$  in  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija, potem je

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

(2) Če je  $D = \{(x, y); \vartheta_1(y) \leq x \leq \vartheta_2(y) \text{ in } c \leq y \leq d\} \subseteq \mathbb{R}^2$  in  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija, potem je

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{\vartheta_1(y)}^{\vartheta_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

### 3. TROJNI INTEGRAL...

... je definiran na podoben način. Po Fubinijevem izreku lahko tudi trojne integrale na nekaterih območjih zapišemo kot trikratne integrale.

### 4. MENJAVA SPREMENLJIVK

Spomnimo se izreka prejšnjega tedna:

**Izrek 3.** Naj bo  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija na  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ . Če je  $x = \varphi(u, v)$ ,  $y = \vartheta(u, v)$ , takšna menjava spremenljivk, da je  $\det J_{\varphi, \vartheta} \neq 0$ , potem

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int f(\varphi(u, v), \vartheta(u, v)) |\det J_{\varphi, \vartheta}| du dv.$$

Podobno, če je  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija na  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  ter  $x = \varphi(u, v, w)$ ,  $y = \vartheta(u, v, w)$ ,  $z = \psi(u, v, w)$  takšna menjava spremenljivk, da je  $\det J_{\varphi, \vartheta, \psi} \neq 0$ , potem velja

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int f(\varphi(u, v, w), \vartheta(u, v, w), \psi(u, v, w)) |\det J_{\varphi, \vartheta, \psi}| du dv dw.$$

Nekaj primerov menjave spremenljivk:

(1) *Polarne koordinate* v  $\mathbb{R}^2$  so podane z

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

$r \geq 0$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , in velja  $\det J_{\text{polar}} = r$ .

(2) *Valjne koordinate* v  $\mathbb{R}^3$  so podane z

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z,$$

$$r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R}, \text{ in velja } \det J_{\text{cylindric}} = r.$$

(3) *Krogelne koordinate* v  $\mathbb{R}^3$  so podane z

$$x = r \cos \varphi \cos \vartheta, y = r \sin \varphi \cos \vartheta, z = r \sin \vartheta.$$

$$r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi], \vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ in velja } \det J_{\text{spherical}} = r^2 \cos \vartheta.$$

## 5. DOMAČA NALOGA

⚡ (1) James Stewart, Calculus, early transcendentals, 2016, strani 1022-23, Exercises 3-52.

⚡ (2) Naj bo  $a \in \mathbb{R}$  neničelno število. Za pišite naslednji integral s spremembo v polarni koordinatni sistem

$$\int_0^a \left( \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y) dx \right) dy.$$

⚡ (3) Zamenjajte vrstni red integracije:

$$\int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y) dx \right) dy = \int_?^? \left( \int_?^? f(x,y) dy \right) dx$$

⚡ (4) Zapišite integral

$$\int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \left( \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z) dz \right) dx \right) dy$$

v valjnih koordinatah.

(Naloge, označene s ⚡ preverjajo razumevanje osnovnih pojmov in so primeri nalog s teoretičnih izpitov.)

## 6. STE ZAMUDILI PREDAVANJA ALI ŽELITE VEDETI VEČ?

(1) James Stewart, Calculus, early transcendentals, 2016, Poglavlje 15.

(2) Wolfram Demonstrations: Approximating a Double Integral with Cuboids.

(3) Ste manjkali na predavanjih? Tu so na voljo prastari posnetki predavanj (2020/21) (ki se ne ujemajo nujno s potekom predmeta letošnje leto).