Matematika 1	**Izročki: 9. teden**

Funkcije in vektorske funkcije več spremenljivk

Polona Oblak

1. Ponovitev funkcij več spremenljivk

1.1. Definicija. *Funkcija več spremenljivk*

$$\begin{aligned} f\colon \quad \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}, \\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) &\mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

je funkcija, ki predpiše realno vrednost $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$ vsaki točki $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n$. Množici $\mathcal{D}_f$ pravimo *definicijsko območje* funkcije f.

V primeru, ko je $n = 2$, je graf funkcije $f = f(x, y)\colon \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ploskev

$$\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y))\colon (x, y) \in \mathcal{D}_f\}$$

v $\mathbb{R}^3$. *Nivojska krivulja* (ali *nivojnica*) funkcije $f = f(x, y)$ je množica vseh točk $(x, y) \in \mathcal{D}_f$, za katere velja $f(x, y) = c$ za dano realno realno število $c \in \mathbb{R}$. Tako vsaka točka $(x, y) \in \mathcal{D}_f$ leži na natanko eni nivojski krivulji in zato se definicijsko območje $\mathcal{D}_f$ razsloji na nivojske krivulje.

1.2. Odvodi. *Parcialni odvod* funkcije $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v točki $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *po spremenljivki x_i* definiramo kot

$$f_{x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(\mathbf{a})}{h}.$$

Tako nam torej parcialni odvod funkcije f po x_i v točki $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pove relativno spremembo funkcijske vrednosti pri zelo majhni spremembi spremenljivke x_i, kjer so ostale spremenljivke fiksne.

Vektor

$$(\operatorname{grad} f)(\mathbf{a}) = (f_{x_1}(\mathbf{a}), f_{x_2}(\mathbf{a}), \ldots, f_{x_n}(\mathbf{a}))$$

imenujemo *gradient* funkcije f v točki $\mathbf{a}$.

Smerni odvod funkcije $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v točki $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *v smeri vektorja $\vec{e}$* je enak

$$f_{\vec{e}}(\mathbf{a}) = (\operatorname{grad} f)(\mathbf{a}) \cdot \frac{\vec{e}}{||\vec{e}||} = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{a}) \frac{e_i}{||\vec{e}||}.$$

Za funkcijo $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ velja:

(1) Gradient funkcije f v točki $\mathbf{a}$ kaže v smeri najhitrjšega naraščanja funkcije f v točki $\mathbf{a}$.
(2) V primeru $n = 2$ je gradient funkcije $f = f(x, y)$ v točki $\mathbf{a}$ pravokoten na nivojsko krivuljo v tej točki.

(3) Smerni odvod $f_{\vec{e}}(\mathrm{a})$ je relativna sprememba funkcijske vrednosti $f(\mathrm{a})$ ob majhnem premiku iz točke a v smeri vektorja $\vec{e}$. Zato velja:
- Če je $f_{\vec{e}}(\mathrm{a}) > 0$, potem f ob majhnem pomiku iz točke a v smeri vektorja $\vec{e}$ narašča.
- Če je $f_{\vec{e}}(\mathrm{a}) < 0$, potem f ob majhnem pomiku iz točke a v smeri vektorja $\vec{e}$ pada.

1.3. **Višji odvodi.** Parcialne odvode drugega reda izračunamo s parcialnim odvajanjem parcialnih odvodov prvega reda. Definiramo jih kot

$$f_{x_i x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})\right).$$

$n \times n$ matriko

$$H_f(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x})\right]_{i,j,=1,\ldots,n}$$

imenujemo *Hessejeva matrika* funkcije f v točki x. Če sta pri tem $f_{x_i x_j}$ in $f_{x_j x_i}$ zvezni funkciji, potem sta omenjena druga parcialna odvoda enaka. Zato je v primeru, ko so vsi parcialni odvodi $f_{x_i x_j}$ zvezni, Hessejeva matrika $H_f(x,y)$ matrika.

Če druge parcialne odvode še naprej odvajamo, dobimo parcialne odvode višjih redov. Če so zvezni, so neodvisni od vrstnega reda odvajanja. V tem primeru za funkcijo f dveh spremeljivk dobimo štiri različne parcialne odvode tretjega reda: $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b)$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(a,b) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(a,b) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(a,b)$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(a,b) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a,b)$ in $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a,b)$.

2. Vektorske funkcije več spremenljivk

2.1. **Definicija.** *Vektorska funkcija*

$$\begin{aligned} F\colon\quad \mathcal{D}_F \subseteq \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m, \\ \mathbf{x} &\mapsto [f_1(\mathbf{x})\ f_2(\mathbf{x})\ \ldots\ f_m(\mathbf{x})]^\mathsf{T} \end{aligned}$$

je m-terica funkcij več spremenljivk.

Vektor spremenljivk bomo označili tudi kot $\vec{x} = \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ in podobno pišemo tudi

$$\vec{F}(\vec{x}) = F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix},$$

da poudarimo, da je v F zbranih m funkcij več spremenljivk.

2.2. **Odvodi.** *Jacobijeva matrika* vektorske funkcije $F\colon \mathcal{D}_F \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je $m \times n$ matrika prvih odvodov funkcij $f_1, \ldots, f_m$:

$$J_F(\mathbf{x}) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Absolutna vrednost determinante Jacobijeve matrike vektorske funkcije $F\colon \mathcal{D}_F \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pove, za kakšen faktor funkcija lokalno raztegne prostornine.

Drugi odvod funkcije $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (tu je $m = 1$) definiramo kot

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{x}^2} = \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \right)^{\mathsf{T}}.$$

Nekaj pravil:

(1) $\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}} = I_n$
(2) Če je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, potem $\frac{\partial A\vec{x}}{\partial \vec{x}} = A$.
(3) Če je $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, potem $\frac{\partial \vec{a}^{\mathsf{T}}\vec{x}}{\partial \vec{x}} = \vec{a}^{\mathsf{T}}$.
(4) Če je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, potem $\frac{\partial (\vec{x}^{\mathsf{T}} A\vec{x})}{\partial \vec{x}} = \vec{x}^{\mathsf{T}}(A + A^{\mathsf{T}})$.
(5) Če je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična matrika, potem velja $\frac{\partial (\vec{x}^{\mathsf{T}} A\vec{x})}{\partial \vec{x}} = 2\vec{x}^{\mathsf{T}} A$.
(6) $\frac{\partial ||\vec{x}||^2}{\partial \vec{x}} = 2\vec{x}^{\mathsf{T}}$.
(7) Če $\vec{G}\colon \mathcal{D}_G \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ in $\vec{F}\colon \mathcal{D}_F \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ in $\vec{H} = \vec{F} \circ \vec{G}$, potem $\frac{\partial \vec{H}}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial (\vec{F}\circ\vec{G})}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{G}}(\vec{G}(\vec{x})) \cdot \frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{x}}$.

3. Domača naloga

ϟ (1) Rešite kviz na Učilnici.

ϟ (2) James Stewart, Calculus, early transcendentals, 2016, stran 945, exercise 5-6, 13-29, 35-48, stran 1020, exercise 1-6.

ϟ (3) Naj bo (u, v) novi koordinatni sistem v $\mathbb{R}^2$, definiran z

$$x = e^u \cos v, y = e^u \sin v,$$

kjer $u \in \mathbb{R}$ and $v \in [0, 2\pi]$. Določite determinanto Jacobijeve matrike $J_{u,v} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

ϟ (4) Naj bodo (u, v, w) nove koordinate v $\mathbb{R}^3$, definirane s predpisom

$$x = u \cos v, y = 2u \sin v, z = 3w.$$

kjer je $u \geq 0$, $v \in [0, 2\pi]$ in $w \in \mathbb{R}$. Izračunajte determinanto Jacobijeve matrike $J_{u,v,w} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$.

ϟ (5) Naj bo (u, v, w) koordinatni sistem v $\mathbb{R}^3$ definiran z

$$x = 3ue^v, y = 2we^u, z = u.$$

Določite determinanto Jacobijeve matrike $J_{u,v,w} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$.

$\lightning$ (6) *Polarne koordinate* v $\mathbb{R}^2$ so podane z

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$$

kjer je $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Pokažite, da je determinanta Jacobijeve matrike enaka

$$\det(J_{\text{polarne}}) = r.$$

$\lightning$ (7) *Cilindrične koordinate* v $\mathbb{R}^3$ so podane z

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z,$$

kjer je $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ in $z \in \mathbb{R}$. , Pokažite, da je determinanta Jacobijeve matrike enaka

$$\det(J_{\text{cilindrične}}) = r.$$

$\lightning$ (8) *Sferične koordinate* v $\mathbb{R}^3$ so podane z

$$x = r\cos\varphi\cos\vartheta,\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta,\ z = r\sin\vartheta,$$

kjer je $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Pokažite, da je determinanta Jacobijeve matrike enaka

$$\det(J_{\text{spherical}}) = r^2\cos\vartheta.$$

(9) Če $\vec{z} = \vec{z}(\vec{x})$ in $\vec{y} = \vec{y}(\vec{x})$, potem pokažite, da je $\frac{\partial(\vec{y}^\mathsf{T}\vec{z})}{\partial\vec{x}} = \vec{z}^\mathsf{T}\frac{\partial\vec{y}}{\partial\vec{x}} + \vec{y}^\mathsf{T}\frac{\partial\vec{z}}{\partial\vec{x}}$.

$\lightning$(10) Naj bosta $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ in funkciji $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirani kot $f(\vec{x}) = \vec{x}^\mathsf{T}\vec{a}$ in $g(\vec{x}) = \vec{x}^\mathsf{T}\vec{b}$. Izračunajte $\frac{\partial(f(\vec{x})g(\vec{x}))}{\partial\vec{x}}$.

$\lightning$(11) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika z lastnostjo $A^\mathsf{T} = -A$. Izračunajte $\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\left(\vec{x}^\mathsf{T}A\vec{x} + ||5\vec{x}||^2\right)$.

$\lightning$(12) Za matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ izračunajte $\frac{\partial||A\vec{x}||^2}{\partial\vec{x}}$.

$\lightning$(13) Naj bodo $B, C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $\vec{b}, \vec{d} \in \mathbb{R}^n$. Za funkcijo

$$f(\vec{x}) = (B\vec{x} + \vec{b})^\mathsf{T}C(D\vec{x} + \vec{d})$$

izračunajte $\frac{\partial f}{\partial\vec{x}}$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial\vec{x}^2}$.

(Naloge, označene s $\lightning$ preverjajo razumevanje osnovnih pojmov in so primeri nalog s teoretičnih izpitov.)

4. Ste zamudili predavanja ali želite vedeti več?

(1) James Stewart, Calculus, early transcendentals, 2016, Poglavja 14.1-14.6.

(2) David A. Harville: Matrix Algebra From a Statistician's Perspective, Springer, 1997, Poglavje 15.

(3) J.E. Gentle: Matrix Algebra, Theory, Computations, in Applications in Statistics, Springer, 2017, Poglavje 4.

(4) K.B. Petersen, M.S. Pedersen: The Matrix Cookbook.
(Pazite na to, da so v vseh treh zgoraj omenjenih referencah odvodi definirani kot transponiranke matrike (1).)

(5) Ste manjkali na predavanjih? Tu in tu (od 1h 09min dalje) so na voljo prastari posnetki predavanj (2020/21) (ki se ne ujemajo nujno s potekom predmeta letošnje leto).