

1. V trapezu $ABCD$ sta vzporedni stranici AB in DC , stranica AB pa je dvakrat daljša od stranice DC . V kakšnem razmerju deli diagonala BD diagonalo AC ?
2. V \mathbb{R}^3 naj bodo dane točke $A(5, -2, 2)$, $B(3, -4, 6)$ in $C(2, 1, -1)$.
 - (a) Izračunaj dolžino daljice AB .
 - (b) Izračunaj kot $\angle BAC$.
3. V \mathbb{R}^3 naj bodo dane točke $A(5, -3, 4)$, $B(7, -2, 2)$ in $C(3, -1, 3)$. Pokaži, da je $\triangle ABC$ enakokrak pravokotni trikotnik in izračunaj dolžino hipotenuze trikotnika.
4. V kvadru s stranicami dolžin 1, 2 in 3 izračunaj dolžino telesne diagonale.
5. V enakokrakem trapezu naj bo dolžina daljše osnovnice enaka 2, dolžina krakov pa 1. Pri tem naj kraka z daljšo osnovnico oklepata kot 60° . S pomočjo vektorjev izračunaj dolžino diagonal in krajše osnovnice.
6. Naj bosta \vec{a} in \vec{b} enotska vektorja (torej vektorja dolžine 1), ki oklepata kot 60° . Določi takšno konstanto α , da bosta vektorja $2\vec{a} + \vec{b}$ in $\alpha\vec{a} + 5\vec{b}$ pravokotna.
7. Vektor $2\vec{a} - \vec{b}$ je pravokoten na vektor $\vec{a} + \vec{b}$, vektor $\vec{a} - 2\vec{b}$ pa je pravokoten na vektor $2\vec{a} + \vec{b}$. Določi kot med vektorjema \vec{a} in \vec{b} .
8. Naj bosta vektorja \vec{a} in \vec{b} pravokotna. Kaj mora še veljati za vektorja \vec{a} in \vec{b} , da bosta vektorja $2\vec{a} + \vec{b}$ in $\vec{a} - \vec{b}$ pravokotna?
9. Dana sta vektorja $\vec{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ in $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$.
 - (a) Določi takšno število α in tak vektor $\vec{c} \perp \vec{a}$, da bo $\vec{b} = \alpha\vec{a} + \vec{c}$.
 - (b) Določi takšno število β in tak vektor $\vec{d} \perp \vec{b}$, da bo $\vec{a} = \beta\vec{b} + \vec{d}$.
10. Naj bosta \vec{a} in \vec{b} takšna vektorja, da je $\|\vec{a}\| = 2$, kot med njima $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ in da sta vektorja $2\vec{a} + \vec{b}$ ter $\vec{a} - \vec{b}$ pravokotna. Določi dolžino vektorja \vec{b} .
11. Dan je trikotnik z oglišči $A(-1, 0, 1)$, $B(2, 3, 1)$, $C(1, 0, -1)$. Poišči točko T , kjer višina iz točke C na stranico AB seka to stranico.
12. V prostoru so dane točke $A(1, 0, 0)$, $B(0, 5, 1)$ in $C(1, -1, 1)$.
 - (a) Poišči takšno točko D , da bodo A, B, C in D določale paralelogram, v katerem je $AB \parallel CD$ in $AD \parallel BC$.
 - (b) Izračunaj kosinus notranjega kota pri oglišču A in ploščino paralelograma.
13. Dane so točke $A(1, -2, -1)$, $B(1, 2, 1)$ in $D(1, -1, 2)$. Določi takšno točko C , da bo $ABCD$ paralelogram (v katerem je $AB \parallel CD$ in $AD \parallel BC$) in izračunaj njegovo ploščino ter dolžine njegovih višin.

14. Naj bodo točke $A(-1, 0, 1)$, $B(0, -1, 3)$ in $C(2, 0, 4)$ oglišča pravilnega šestkotnika $ABCDEF$, v katerem je $AB \parallel ED$, $BC \parallel EF$ in $CD \parallel AF$.
- Izračunaj koordinate oglišč D , E in F .
 - Izračunaj ploščino šestkotnika $ABCDEF$.
 - Izračunaj ostri kot, ki ga oklepata diagonali AC in BF .
 - Določi tisto točko na diagonali AC , ki je najbližja oglišču F .
 - Določi tisto točko na diagonali AD , ki je najbližja oglišču F .
15. Izračunaj ploščino, dolžine stranic in notranje kote trikotnika z oglišči $A(1, -1, 1)$, $B(-1, 1, 1)$, $C(1, 0, 2)$.
16. Vektorja \vec{a} in \vec{b} določata paralelogram s ploščino 5. Kolikšna je ploščina paralelograma, ki ga določata vektorja $-\vec{a} - 3\vec{b}$ in $3\vec{a} + 3\vec{b}$?
17. Naj bosta $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ in \vec{b} takšna vektorja v \mathbb{R}^3 , da oklepata kot 30° in da velja $\|\vec{b}\| = 2$. Določi ploščino paralelograma z robovi $\vec{a} + \vec{b}$ in $2\vec{a} - \vec{b}$.
18. Izračunaj volumen paralelepipeda $ABCDEFGH$, ki je napet na točke $A(2, 5, -3)$, $B(1, 0, -2)$, $D(2, 2, -3)$ ter $E(0, -1, 5)$ (pri tem sta $ABCD$ ter $EFGH$ njegovi vzporedni ploskvi in $AE \parallel BF \parallel CG \parallel DH$).
19. Vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ naj bodo paroma pravokotni in naj velja $\|\vec{a}\| = 1$, $\|\vec{b}\| = 2$ in $\|\vec{c}\| = 2$.
- Določi volumen paralelepipeda z robovi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
 - Določi volumen paralelepipeda z robovi $\vec{a} + 2\vec{b}, \vec{b} - 2\vec{c}$ in $\vec{a} + 3\vec{c}$.
20. Vektorji \vec{a}, \vec{b} in \vec{c} določajo paralelepiped s prostornino 5. Določi prostornino paralelepipeda, ki ga določajo vektorji $3\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $-2\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c}$ in $-3\vec{a} - 2\vec{b}$.
21. Naj bosta \vec{a} in \vec{b} takšna vektorja v \mathbb{R}^3 , da velja $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 2$ in da sta vektorja $\vec{c} = \vec{a} + 6\vec{b}$ in $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ pravokotna. Preveri, da sta vektorja \vec{a} in \vec{c} neničelna, in pokaži, da sta vzporedna.
22. V \mathbb{R}^3 naj bodo dane točke $A(-1, 0, 1)$, $B(0, -1, 3)$ in $C(2, 0, 4)$.
- Določi enačbo premice p , ki poteka skozi točki A in C .
 - Določi enačbo premice q , ki je vzporedna premici BC in poteka skozi A .
23. Poišči enačbo ravnine, ki gre skozi točke $A(3, 1, -2)$, $B(3, -1, 1)$ in $C(1, 2, 3)$.
24. Poišči točko, ki je presek premice

$$p: \quad x - 1 = \frac{y - 3}{-2} = \frac{z}{2}$$

in ravnine

$$\Sigma : x + y - z = 1 .$$

25. Poišči točko, ki je presek ravnin

$$x - y + z = 0 ,$$

$$2x + y - z = 3 ,$$

$$-x + 2y + z = 4 .$$

26. V \mathbb{R}^3 sta dani premici

$$p : x - 1 = y - 2 = z$$

in

$$q : \frac{x - 2}{-1} = \frac{y - 3}{2} = \frac{z - 1}{3} .$$

Pokaži, da se premici sekata in zapiši enačbo ravnine, ki ju vsebuje.

27. V \mathbb{R}^3 sta dani premici

$$p : \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 3}{2} = z - 1$$

in

$$q : x + 2 = \frac{y - 3}{-2} = \frac{z + 2}{2} .$$

Določi njuno presečišče P in zapiši enačbo premice, ki poteka skozi P in je pravokotna na p in q .

28. Naj bosta Π in Σ ravnini z enačbama

$$\Pi : 2x + y = 4 \quad \text{in} \quad \Sigma : x + y - 3z = 6$$

in naj bo premica p njun presek. Poišči smerni vektor premice p in ugotovi ali je premica p vzporedna ravnini z enačbo

$$x - z = 2 .$$

29. Poišči enačbo premice, ki je presek ravnin z enačbama

$$2x - y = 4 \quad \text{in} \quad x + 2y - 3z = 6 .$$

30. Izračunaj razdaljo med premicama

$$p : \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{-2} = z$$

in

$$q : x - 2 = \frac{y}{2} = \frac{z + 1}{2} .$$

31. V \mathbb{R}^3 sta dani premica

$$p : \frac{x}{-3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{2}$$

in ravnina

$$\Sigma : 2x - y + 2z = 2.$$

Pokaži, da sta p in Σ vzporedni in izračunaj razdaljo med njima.

32. V prostoru so dane 4 točke $A(1, 2, 1)$, $B(2, 3, 3)$, $C(4, 3, 4)$ in $D(3, 2, 2)$.

(i) Pokaži, da A, B, C in D ležijo na skupni ravnini in določi njeno enačbo.

(ii) Pokaži, da A, B, C in D napenjajo paralelogram.

33. Prezrcali točko $A(-1, 3, 0)$ preko ravnine z enačbo

$$2x - y + z = 7.$$

34. Točko $T(1, 1, 1)$ prezrcali čez premico p

$$\frac{x}{2} = y - 3 = \frac{z}{2}.$$

35. Piramida ima oglišča $A(3, 1, 1)$, $B(1, 3, 4)$, $C(-1, -1, 1)$ in $D(3, -2, 7)$. Označimo s T nožišče višine iz točke D . Določi koordinate točke T . Nasvet: Poišči (pravokotno) projekcijo točke D na ravnino, ki je določena s točkami A, B in C .

36. Poišči pravokotno projekcijo premice z enačbo

$$\frac{x-5}{4} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{-1}$$

na ravnino $x + y + z = 0$.

37. Premico p

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1}, z = 0$$

prezrcali čez ravnino Π

$$2x + y = 0.$$

38. Naj bo p premica skozi točko $A(2, 1, 0)$ in s smernim vektorjem $\vec{s} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Zapiši

vektor

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

kot vsoto dveh vektorjev, od katerih je eden vzporeden s premico p , drugi pa je pravokoten nanjo.

39. Poišči enačbo premice, ki gre skozi točko $A(1, 2, -1)$ in seka premico z enačbo

$$x - 4 = \frac{y - 6}{4} = \frac{z}{-1}$$

pod pravim kotom.

40. Na premici

$$p = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}$$

poišči točki, ki sta od ravnine

$$\Sigma : 2x + y - 2z = 2$$

oddaljeni za 1.

41. Dana je premica

$$p : \frac{x + 1}{2} = y + 2 = \frac{z - 1}{-2} .$$

Določi enačbo premice q , ki seka p pod pravim kotom in gre skozi točko $A(2, 1, 1)$.

42. Na premici p , ki je presek ravnin Π in Σ

$$\Pi : 2x - y = 2, \quad \Sigma : x - y - z = 1$$

poišči točko, ki je enako oddaljena od točk $A(4, 1, 1)$ in $B(2, 1, 1)$.

Rešitve:

1. 2:1
2. (a) $2\sqrt{6}$
(b) $\cos \angle BAC = -\frac{\sqrt{2}}{3}$
3. Pokaži, da je $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$, $\|\vec{AB}\| = \|\vec{AC}\| = 3$ in dolžina hipotenuze $\|\vec{BC}\| = 3\sqrt{2}$.
4. $\sqrt{14}$.
5. dolžini diagonal: $\sqrt{3}$, dolžina krajše osnovnice: 1
6. $\alpha = -4$
7. $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.
8. Vektorja $\vec{a} + \vec{b}$ in $\vec{a} - \vec{b}$ sta pravokotna, ko velja $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$, torej

$$\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} = 0.$$

Upoštevamo simetričnost skalarnega produkta ter definicijo dolžine vektorja in dobimo $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$.

9. (a) $\alpha = -\frac{1}{6}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{14}{3} \\ -\frac{14}{3} \end{bmatrix}$,
(b) $\beta = -\frac{2}{15}$, $\vec{d} = \begin{bmatrix} \frac{64}{15} \\ \frac{28}{15} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$.
10. $\|\vec{b}\| = \frac{-1 + \sqrt{33}}{2}$
11. $T(0, 1, 1)$
12. (a) $D(2, -6, 0)$
(b) $\cos(\angle A) = -\frac{31}{\sqrt{999}}$, $pl_{ABCD} = \sqrt{38}$.
13. $C(1, 3, 4)$, $pl_{ABCD} = 10$, $v_{AB} = \sqrt{5}$, $v_{AD} = \sqrt{10}$.
14. (a) $D = (3, 2, 3)$, $E = (2, 3, 1)$ in $F = (0, 2, 0)$.
(b) $pl = 9\sqrt{3}$.
(c) 60°
(d) $A(-1, 0, 1)$
(e) $T\left(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$
15. $pl_{ABC} = \sqrt{3}$, $\|AB\| = 2\sqrt{2}$, $\|AC\| = \sqrt{2}$, $\|BC\| = \sqrt{6}$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$.
16. 30
17. 21
18. 18
19. (a) 4

(b) 28

20. 55

21. Namig: Preveri, da je $\|\vec{a}\| > 0$, $\|\vec{c}\| > 0$ in $\|\vec{a} \times \vec{c}\| = 0$.

22. (a) $p : \frac{x+1}{3} = \frac{z-1}{3}, y = 0$.

(b) $q : \frac{x+1}{2} = y = z - 1$.

23. $13x + 6y + 4z = 37$

24. $A(2, 1, 2)$

25. $A(1, 2, 1)$

26. $x - 4y + 3z = -7$

27. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-2}$

28. $\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$

29. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{6} = \frac{z+3}{5}$

30. $\frac{2}{3}$

31. $\frac{5}{3}$

32. $x + 3y - 2z = 5$

33. $A'(7, -1, 4)$

34. $T'(-\frac{1}{9}, \frac{49}{9}, -\frac{1}{9})$

35. $T(1, 2, 3)$

36. $\frac{x-2}{8} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{-7}$

37. $x = \frac{y}{-7}, z = 0$

38. $\begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

39. $x - 1 = z + 1, y = 2$

40. $A(-1, 3, 1), B(5, -3, 1)$

41. $x - 2 = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$

42. $C(3, 4, -2)$