

1. Poišči vse rešitve sistemov linearnih enačb:

(a)

$$\begin{aligned}x - 2y + z &= 1 \\x - 2y - t &= -1 \\2x + 4y + z - t &= 0 \\-x + 2y + z + 2t &= 3\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\x_1 + x_3 + x_4 + x_5 &= 2 \\x_1 + x_2 + x_4 + x_5 &= 3 \\x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 4 \\x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 5\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}x + 2y + z + 5t &= 3 \\3x + 6y - 2z + 5t &= 4 \\x + 2y - 4z - 5t &= -2 \\2x + 4y - 3z &= 1\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}x - 2z - t &= -1 \\-x + y + 3z &= 1 \\x + y - z - t &= 1 \\2x + 2y - 2z - 3t &= 0\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}2x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 8 \\x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\-x_1 + x_2 - 2x_4 &= -3 \\2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 4\end{aligned}$$

2. Poišči pogoj za parametre a, b, c , pri katerem je rešljiv sistem linearnih enačb:

$$\begin{aligned}x + 5y + 3z &= a \\x + 2y + z &= b \\-2x - y &= c\end{aligned}$$

Poišči vse rešitve, kadar obstajajo.

3. Obravnavaj sistem enačb

$$\begin{aligned}2x_1 + 2x_3 &= a + 1 \\-x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= -2a \\x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= a - 1\end{aligned}$$

4. Določi range matrik A in B v odvisnosti od parametra t

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 & 1 \\ -1 & t+1 & 1 & 1 \\ 0 & 2t+1 & t+1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & t \end{bmatrix}.$$

5. Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Določi vse matrike $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, za katere velja

$$AX - XB = 5A.$$

6. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Izračunaj A^{-1} .

(b) Poišči tako matriko X , da je $XA = A^T$.

7. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Poišči matriko $X \in \mathbb{R}^{2,2}$, ki reši enačbo

$$AXA^T = A^T A.$$

8. Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Reši matrično enačbo

$$AX + BX = B - I.$$

9. Dane so matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Reši enačbo

$$XA + XB - C = I.$$

10. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poišči matriko X , ki zadošča enačbi

$$A - X = XA.$$

11. Dana je matrika $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Reši matrično enačbo

$$AX + 2X = A + I$$

12. Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Reši enačbo

$$AX(I + B) = B + A - I.$$

13. Določi vsa taka realna števila x , da bo matrika A obrnljiva.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2x & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4x & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6x \end{bmatrix}.$$

14. Določi vsa taka realna števila a , da bo matrika A obrnljiva.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & a & 0 \\ 1 & a & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitve:

1. (a) Če je t parameter, je $x = t - 1, y = 0, z = 2 - t$
 (b) $x_1 = 11, x_2 = -1, x_3 = -2, x_4 = -3, x_5 = -4$
 (c) y, t sta parametra, $x = 2 - 2y - 3t, z = 1 - 2t$
 (d) z je parameter, $x = 1 + 2t, y = 2 - z, t = 2$
 (e) x_2, x_4 sta parametra, $x_1 = 3 + x_2 - 2x_4, x_3 = -2$
2. Če je $a - 3b - c = 0$, je sistem rešljiv, z je parameter, $x = (5b - 2a + z)/3, y = (a - b - 2z)/3$
 Če je $a - 3b - c \neq 0$, sistem ni rešljiv.
3. Če je $a = 1$, je sistem rešljiv, x_3 je parameter, $x_1 = 1 - x_3, x_2 = -2x_3, x_4 = -1$
 Če je $a \neq 1$, sistem ni rešljiv.
4. Če je $t = 0$, je $\text{rang} A = 2$, če je $t \neq 0$, je $\text{rang} A = 3$.
 Če je $t = -1$, je $\text{rang} B = 2$, če je $t \neq -1$, je $\text{rang} B = 3$.
5. $X = \begin{bmatrix} 11 & -4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$
6. (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
 (b) $X = A^T A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$
7. $X = A^{-1} A^T A (A^{-1})^T = \begin{bmatrix} 13 & -21 \\ -21 & 34 \end{bmatrix}$
8. $X = (A + B)^{-1} (B - I) = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \\ 7 & 0 & -2 \end{bmatrix}$
9. $X = (I + C)(A + B)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$
10. $X = A(A + I)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
11. $X = (A + 2I)^{-1} (A + I) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
12. $X = A^{-1} (B + A - I) (I + B)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$
13. $x \neq 1$ in $x \neq -1/2$
14. $a \neq 2$ in $a \neq -1$