1. Za naslednje funkcije poišči definicijsko območje, zalogo vrednosti in nariši nekaj nivojskih krivulj.

   (a) $\sqrt{x^2 - y^2}$

   (b) $\log(x + y)$

   (c) xy

   (d) x^y.

2. Za funkcijo $f(x, y) = (x^2 - y^2 + 2x)^2$ izračunaj:

   (a) njene prve in druge parcialne odvode,

   (b) njen gradient v točki $(1, 1)$ in

   (c) tangentno ravnino v točki $(1, 1)$.

3. Z uporabo totalnega diferenciala približno izračunaj vrednost izraza

$$\sqrt{0,98 + 0,08^3}\,.$$

Rešitev: Če definiramo funkcijo $f(x, y) = \sqrt{x + y^3}$, iščemo vrednost funkcije f v točki $(0.98, 0.08)$. Ker poznamo vrednost funkcije $f(1, 0) = 1$, lahko aproksimiramo $f(0.98, 0.08)$ s pomočjo totalnega diferenciala kot

$$f(0.98, 0.08) = f(1, 0) + f_x(1, 0)(-0.02) + f_y(1, 0)0.08.$$

Parcialna odvoda funkcije f sta enaka

$$f_x(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x + y^3}}$$

ter

$$f_y(x, y) = \frac{3y}{2\sqrt{x + y^3}},$$

torej je $f_x(1, 0) = \frac{1}{2}$ ter $f_y(1, 0) = 0$.
Sledi, da je

$$f(0.98, 0.08) = 1 - 0.01 = 0.99.$$

4. Za približno koliko odstotkov se spremeni volumen valjaste pločevinke piva s premerom osnovne ploskve $6.6cm$ in višino $15cm$, če se višina in premer osnovne ploskve povečata za 1%? Za koliko se v tem primeru poveča površina? Kaj pa, če se polmer osnovne ploskve zmanjša za 1%, višina pa poveča za 2%? *Nalogo reši z uporabo totalnega diferenciala.*

5. Za funkcijo $f(x, y) = (x + y)\log(x^2 + y^2)$ izračunaj:

   (a) smerni odvod v točki $(1, 1)$ v smeri vektorja $\vec{a} = (1, 2)$,

   (b) smerni odvod v točki $(1, 1)$ v smeri proti koordinatnemu izhodišču in

   (c) smerni odvod v točki $(1, 1)$ v smeri najhitrejšega naraščanja.

6. Sobo velikosti $4m\times4m\times2m$ (širina $\times$ dolžina $\times$ višina) opremimo s koordinatnim sistemom tako, da je izhodišče spredaj levo spodaj, stranice sobe pa ležijo na pozitivnih delih koordinatnih osi. Temperaturno porazdelitev v sobi podaja funkcija

$$T(x, y, z) = (xy + 1)e^{-z}.$$

   (a) Muha, ki je v izhodišču odleti v smeri telesne diagonale proti nasprotnemu oglišču. Ali se bo na začetku svojega poleta ogrela ali ohladila?

   (b) V katero smer naj se odpravi po polovici poti, da se bo čimhitreje ohladila?

7. Elipsoid v $\mathbb{R}^3$ podamo implicitno z enačbo

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{8} = 1.$$

   Poišči ravnini, ki sta na ta elipsoid tangentni in sta pravokotni na premico p s parametrizacijo

$$\vec{r}(t) = (0, 4, 0) + t(1, 0, 2).$$

8. Temperatura površine plošče (parametrizirane s spremenljivkama x in y) se s časom t spreminja takole:

$$u(x, y, t) = 25\, e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\, (1 + \sin \pi t)\ .$$

   - Izračunaj temperaturo v točki $(3, 4)$ ob času $t = 5/6$.
   - Izračunaj in zapiši gradient funkcije u.
   - Ali se točka na plošči s koordinatami (-3,1) ob času $t = 7/4$ segreva ali ohlaja?
   - S pomočjo totalnega diferenciala oceni temperaturo plošče v točki $(4.01, 3.02)$ ob času $t = 0.95$.

9. Poišči največjo in najmanjšo vrednost, ki jo lahko zavzame funkcija $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ na krogu z enačbo $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$.

10. Poišči točko na paraboli $y^2 = 4x$, ki je najbližja točki $(1, 0)$.

11. V elipso z enačbo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ včrtaj pravokotnik, katerega stranice so vzporedne koordinatnima osema in ima največjo možno ploščino.

12. Pred nami leži (pravokotni) list papirja, katerega krajša stranica ima dolžino a, daljša pa b.

    List dvakrat zapognemo pod kotom $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$, obakrat vzporedno z daljšo stranico lista in na razdalji x od roba.

    Določi, kje moramo prepogniti list in za koliko stopinj, da bomo dobili žleb z največjo možno prostornino.

13. Skupina za analizo učinkovitosti v nekem programerskem podjetju je po večletnih opazovanjih prišla do sklepa, da mero učinkovitosti posameznega programerja, ki x ur programira in y ur vzdržuje že obstoječo kodo dobro opisuje formula

    $$u(x, y) = \sqrt{x} + 5\sqrt{y}\ .$$

    Programer mora na nekem projektu opraviti 52 ur dela. Koliko dela naj posveti razvoju novosti in koliko vzdrževanju že obstoječe kode, da bo glede na zgornjo formulo kar najbolj učinkovit?