

2. kolokvij iz Matematike 2

11. januar 2013

- Čas pisanja: **120 minut**
- Vse naloge rešujte na dodatno polo, pri čemer naj se vsaka naloga začne na svoji strani.
- Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je **strogo** prepovedano.
- Vse odgovore dobro utemeljite.

1. [20 točk] Podana je matrika $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

- Zapiši kvadratno formo $K(x, y)$, ki jo določa matrika A .
- Zapiši kanonično obliko kvadratne forme $K(x, y)$.
- Določi ustrezno zamenjavo spremenljivk, ki kvadratno formo K spremeni v kanonično.
- Denimo, da je A Hessejeva matrika funkcije f v točki (a, b) . Če je (a, b) stacionarna točka funkcije f , kaj lahko poveš o točki (a, b) ?

2. [25 točk] Podana je funkcija dveh spremenljivk

$$f(x, y) = \log(x^2 - y).$$

- Določi definicijsko območje \mathcal{D}_f funkcije f .
- Zapiši in nariši nivojsko krivuljo, ki gre skozi točko $(1, 0)$.
- Izračunaj gradient funkcije f v poljubni točki (x, y) .
- V kateri točki funkcija najhitreje narašča v smeri y -osi?
- Ali se bo funkcijska vrednost funkcije f povečala ali zmanjšala, če se za malo premaknemo iz točke $(1, 0)$ v smeri vektorja $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$?

3. [30 točk] Funkcija g dveh spremenljivk ima predpis

$$g(x, y) = x^2 - x^2 y^2 + y^2.$$

- (a) Poišči stacionarne točke funkcije g .
- (b) Ali je katera od teh točk lokalni minimum ali maksimum?
- (c) Poišči največjo in najmanjšo vrednost, ki jo zavzame g na krožnici $x^2 + y^2 = 1$.
- (d) Poišči največjo in najmanjšo vrednost, ki jo zavzame g na krogu $x^2 + y^2 \leq 1$.

4. [25 točk] Dana je diferencialna enačba

$$xy' = 2y.$$

- (a) Poišči splošno rešitev te diferencialne enačbe. Opiši družino krivulj, ki jo rešitve določajo.
- (b) Poišči tisto rešitev diferencialne enačbe, ki zadošča pogoju $y(1) = 1$.
- (c) Opiši družino ortogonalnih trajektorij na družino krivulj iz točke (a).