Matematika 1	**Izročki: 9. teden**

Večkratni integrali

Polona Oblak

1. Dvojni integralna pravokotniku

Formalno definiramo dvojni integral

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy,$$

funkcije $f\colon r \to \mathbb{R}$ na pravokotniku $R = [a,b]\times[c,d]$ na naslednji način. Najprej razdelimo pravokotnik R na mn manjših pravokotničkov R_{ij} s stranicama dolžin $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ter $\Delta y = \frac{d-c}{m}$. V vsakem pravokotničku R_{ij} izberemo poljubno točko (x_{ij}^*, y_{ij}^*). Prostornina telesa pod grafom $z = f(x,y)$ nad pravokotnikom R_{ij} je tako približno enaka

$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta x\Delta y.$$

Dvojni integral funkcije f na pravokotniku $R = [a,b]\times[c,d]$ tako definiramo kot

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta x\Delta y,$$

če ta limita obstaja.

Izkaže se, da je integral $\iint_R f(x,y)\,dxdy$ neodvisen od izbire točke $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in R_{ij}$. Če je f nenegativna funkcija, je $\iint_R f(x,y)\,dxdy$ enak prostornini telesa, ki je omejen s pravokotnikom R ter grafom $z = f(x,y)$.

Izrek 1 (Fubini)**.** *Če je $f\colon R \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija na pravokotniku $R = [a,b]\times[c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$, potem*

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

2. Dvojni integral

Če je $D \subseteq \mathbb{R}^2$ neko omejeno območje ter $f\colon D \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, izberimo tak pravokotnik R, da velja $D \subseteq R$. Sedaj definiramo *dvojni integral funkcije f na območju D* kot

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_R F(x,y)\,dxdy\,,$$

kjer

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Sedaj lahko zapišimo tudi Fubinijev izrek za nepravokotna območja.

Izrek 2 (Fubini). (1) *Če je* $D = \{(x,y);\ a \le x \le b$ *in* $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ *in* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *zvezna funkcija, potem je*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

(2) *Če je* $D = \{(x,y);\ \vartheta_1(y) \le x \le \vartheta_2(y)$ *in* $c \le y \le d\} \subseteq \mathbb{R}^2$ *in* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *zvezna funkcija, potem je*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\vartheta_1(y)}^{\vartheta_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

3. Trojni integral…

… je definiran na podoben način. Po Fubinijevem izreku lahko tudi trojne integrale na nekaterih območjih zapišemo kot trikratne integrale.

4. Menjava spremenljivk

Spomnimo se izreka prejšnjega tedna:

Izrek 3. *Naj bo* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *zvezna funkcija na* $D \subseteq \mathbb{R}^2$. *Če je* $x = \varphi(u,v)$, $y = \vartheta(u,v)$, *takšna menjava spremenljivk, da je* $\det J_{\varphi,\vartheta} \neq 0$, *potem*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_D f(\varphi(u,v),\vartheta(u,v))\,|\det J_{\varphi,\vartheta}|\ dudv.$$

Podobno, če je $f\colon D \to \mathbb{R}$ *zvezna funkcija na* $D \subseteq \mathbb{R}^3$ *ter* $x = \varphi(u,v,w)$, $y = \vartheta(u,v,w)$, $z = \psi(u,v,w)$ *takšna menjava spremenljivk, da je* $\det J_{\varphi,\vartheta,\psi} \neq 0$, *potem evlja*

$$\iiint\limits_D f(x,y,x)\,dxdydz = \int_D f(\varphi(u,v,w),\vartheta(u,v,w),\psi(u,v,w))\,|\det J_{\varphi,\vartheta,\psi}|\ dudvdw.$$

Nekaj primerov menjave spremenljivk:

(1) *Polarne koordinate* v $\mathbb{R}^2$ so podane z

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$$

$r \ge 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, in velja $|\det J_{\text{polar}}| = r$.

(2) *Cilindrične koordinate* v $\mathbb{R}^3$ so podane z

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z,$$

$r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$, in velja $|\det J_{\text{cylindric}}| = r$.

(3) *Sferične koordinate* v $\mathbb{R}^3$ so podane z

$$x = r\cos\varphi\cos\vartheta,\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta,\ z = r\sin\vartheta.$$

$r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ in velja $|\det J_{\text{spherical}}| = r^2\cos\vartheta$.

5. Nadaljnje branje

(1) James Stewart, Calculus, early transcendentals, 2016, Poglavje 15.
(2) Wolfram Demonstrations: Approximating a Double Integral with Cuboids.

6. Domača naloga

ϟ (1) James Stewart, Calculus, early transcendentals, 2016, strani 1022-23, Exercises 3-52.

ϟ (2) Naj bo (u, v) novi koordinatni sistem v $\mathbb{R}^2$, definiran z

$$x = e^u\cos v, y = e^u\sin v,$$

kjer $u \in \mathbb{R}$ and $v \in [0, 2\pi]$. Določite determinanto Jacobijeve matrike $J_{u,v} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

ϟ (3) Naj bodo (u, v, w) nove koordinate v $\mathbb{R}^3$, definirane s predpisom

$$x = u\cos v, y = 2u\sin v, z = 3w.$$

kjer je $u \geq 0$, $v \in [0, 2\pi]$ in $w \in \mathbb{R}$. Izračunajte determinanto Jacobijeve matrike $J_{u,v,w} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$.

ϟ (4) Naj bo (u, v, w) koordinatni sistem v $\mathbb{R}^3$ definiran z

$$x = 3ue^v, y = 2we^u, z = u.$$

Določite determinanto Jacobijeve matrike $J_{u,v,w} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$.

ϟ (5) Naj bo $a \in \mathbb{R}$ neničelno število. Za pišite naslednji integral s spremembo v polarni koordinatni sistem

$$\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx \right) dy.$$

ϟ (6) Zamenjajte vrstni red integracije:

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx \right) dy = \int_?^? \left(\int_?^? f(x,y)dy \right) dx$$

ϟ (7) Zapišite integral

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)dz\right)dx\right)dy$$

v cilindričnih koordinatah.

(Naloge, označene s ϟ preverjajo razumevanje osnovnih pojmov in so primeri nalog s teoretičnih izpitov.)