Matematika 1 **Izročki: 9. teden**

Funkcije in vektorske funkcije več spremenljivk, ponovitev

Polona Oblak

1. Funkcije več spremenljivk

1.1. **Definicija.** *Funkcija več spremenljivk*

$$\begin{aligned} f\colon \quad & \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n && \to \mathbb{R}, \\ \mathbf{x} = & (x_1, x_2, \ldots, x_n) && \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

je funkcija, ki predpiše realno vrednost $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$ vsaki točki $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n$. Množici $\mathcal{D}_f$ pravimo *definicijsko območje* funkcije f.

V primeru, ko je $n = 2$, je graf funkcije $f = f(x, y)\colon \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ploskev

$$\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y))\colon (x, y) \in \mathcal{D}_f\}$$

v $\mathbb{R}^3$. *Nivojska krivulja* (ali *nivojnica*) funkcije $f = f(x, y)$ je množica vseh točk $(x, y) \in \mathcal{D}_f$, za katere velja $f(x, y) = c$ za dano realno realno število $c \in \mathbb{R}$. Tako vsaka točka $(x, y) \in \mathcal{D}_f$ leži na natanko eni nivojski krivulji in zato se definicijsko območje $\mathcal{D}_f$ razsloji na nivojske krivulje.

1.2. **Odvodi.** *Parcialni odvod* funkcije $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v točki $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *po spremenljivki x_i* definiramo kot

$$f_{x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(\mathbf{a})}{h}.$$

Tako nam torej parcialni odvod funkcije f po x_i v točki $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pove relativno spremembo funkcijske vrednosti pri zelo majhni spremembi spremenljivke x_i, kjer so ostale spremenljivke fiksne.

Vektor

$$(\mathrm{grad}\, f)(\mathbf{a}) = (f_{x_1}(\mathbf{a}), f_{x_2}(\mathbf{a}), \ldots, f_{x_n}(\mathbf{a}))$$

imenujemo *gradient* funkcije f v točki $\mathbf{a}$.

Smerni odvod funkcije $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v točki $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *v smeri vektorja $\vec{e}$* je enak

$$f_{\vec{e}}(\mathbf{a}) = (\mathrm{grad}\, f)(\mathbf{a}) \cdot \frac{\vec{e}}{||\vec{e}||} = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{a}) \frac{e_i}{||\vec{e}||}.$$

Za funkcijo $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ velja:

(1) Gradient funkcije f v točki $\mathbf{a}$ kaže v smeri najhitrjšega naraščanja funkcije f v točki $\mathbf{a}$.
(2) V primeru $n = 2$ je gradient funkcije $f = f(x, y)$ v točki $\mathbf{a}$ pravokoten na nivojsko krivuljo v tej točki.

(3) Smerni odvod $f_{\vec{e}}(\mathbf{a})$ je relativna sprememba funkcijske vrednosti $f(\mathbf{a})$ ob majhnem premiku iz točke a v smeri vektorja $\vec{e}$. Zato velja:
- Če je $f_{\vec{e}}(\mathbf{a}) > 0$, potem f ob majhnem pomiku iz točke a v smeri vektorja $\vec{e}$ narašča.
- Če je $f_{\vec{e}}(\mathbf{a}) < 0$, potem f ob majhnem pomiku iz točke a v smeri vektorja $\vec{e}$ pada.

1.3. **Linearna aproksimacija.** Vrednost funkcije $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lahko v točki blizu a ocenimo z vrednostjo $f(\mathbf{a})$. Najprej si nazorno oglejmo, kako to naredimo za funkcijo dveh spremenljivk. Denimo, da želimo približno oceniti vrednost funkcije $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v točki blizu točke (a, b). Točke, ki so "blizu"točki (a, b) so oblike $(a+h, b+k)$, kjer sta h in k dovolj majhni realni števili. Tangentna ravnina $\Sigma_{(a,b)}$ na graf $z = f(x, y)$ v točki $(a, b, f(a, b))$ vsebuje vektorja $[1, 0, f_x(a, b)]^T$ ter $[0, 1, f_y(a, b)]^T$. Normala na ravnino $\Sigma_{(a,b)}$ je tako enaka

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(a,b) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(a,b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_x(a,b) \\ -f_y(a,b) \\ 1 \end{bmatrix},$$

ker pa ravnina vsebuje tudi točko $(a, b, f(a, b))$, je enačba tangentne ravnine enaka

$$-f_x(a,b)x - f_y(a,b)y + z = -f_x(a,b)a - f_y(a,b)b + f(a,b).$$

Če izrazimo tretjo koordinato z točke (x, y, z) na tangentni ravnini $\Sigma_{(a,b)}$, dobimo enačbo tangentne ravnine

$$z = f(a,b) + (x-a)f_x(a,b) + (y-b)f_y(a,b).$$

Če torej želimo izračunati približno funkcijsko vrednost $f(a+h, b+k)$, jo lahko ocenimo z višino točke $(a+h, b+k, z)$ na tangentni ravnini $\Sigma_{(a,b)}$. Torej je

$$f(a+h, b+k) \cong f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k.$$

Pri tem bi lahko zadnja sumanda zapisali tudi kot skalarni produkt gradienta funkcije f v točki (a, b) in vektorja pomika (h, k) iz točke (a, b). Tako lahko linearno aproksimacijo funkcije dveh spremenljivk posplošimo na funkcije več spremenljivk. Za dano funkcijo $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lahko v točki $\mathbf{a}+\mathbf{h}$ blizu a njeno funkcijsko vrednost ocenimo s formulo

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \cong f(\mathbf{a}) + (\operatorname{grad} f)(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}.$$

1.4. **Višji odvodi.** Parcialne odvode drugega reda izračunamo s parcialnim odvajanjem parcialnih odvodov prvega reda. Definiramo jih kot

$$f_{x_i x_j}(\mathbf{a}x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}x)\right).$$

$n \times n$ matriko

$$H_f(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x})\right]_{i,j,=1,\ldots,n}$$

imenujemo *Hessejeva matrika* funkcije f v točki x. Če sta pri tem $f_{x_ix_j}$ in $f_{x_jx_i}$ zvezni funkciji, potem sta omenjena druga parcialna odvoda enaka. Zato je v primeru, ko so vsi parcialni odvodi $f_{x_ix_j}$ zvezni, Hessejeva matrika $H_f(x,y)$ matrika.

Če druge parcialne odvode še naprej odvajamo, dobimo parcialne odvode višjih redov. Če so zvezni, so neodvisni od vrstnega reda odvajanja. V tem primeru za funkcijo f dveh spremeljivk dobimo štiri različne parcialne odvode tretjega reda: $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b)$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(a,b) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(a,b) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(a,b)$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(a,b) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a,b)$ in $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a,b)$.

2. Vektorske funkcije več spremenljivk

2.1. Definicija. *Vektorska funkcija*

$$\begin{aligned} F\colon \quad \mathcal{D}_F \subseteq \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m, \\ \mathbf{x} &\mapsto [f_1(\mathbf{x})\ f_2(\mathbf{x})\ \ldots\ f_m(\mathbf{x})]^\mathsf{T} \end{aligned}$$

je m-terica funkcij več spremenljivk.

2.2. Odvodi. *Jacobijeva matrika* vektorske funkcije $F\colon \mathcal{D}_F \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je $m \times n$ matrika prvih odvodov funkcij $f_1, \ldots, f_m$:

$$J_F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

Absolutna vrednost determinante Jacobijeve matrike vektorske funkcije $F\colon \mathcal{D}_F \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pove, za kakšen faktor funkcija lokalno raztegne prostornine.

3. Nadaljnje branje in gledanje

(1) James Stewart, Calculus, early transcendentals, 2016, Poglavja 14.1-14.6.
(2) Khan Academy: Unit: Derivatives of multivariable functions.

4. Domača naloge

(1) Rešite kviz na Učilnici.
(2) James Stewart, Calculus, early transcendentals, 2016, stran 945, exercise 5-6, 13-29, 35-48, stran 1020, exercise 1-6.