Matematika 1 **Izročki: 7. teden**

Izometrije

Polona Oblak

1. (Nelinearne) izometrije

Izometrija je (*morda nelinearna*) preslikava $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, za katero velja

$$||x-y|| = ||\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(y)||,$$

za vse $x, y \in \mathbb{R}^n$. To pomeni, da izometrije ohranjajo razdalje.

Izrek 1. *Za linearno preslikavo $\tau\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ so naslednje trditve ekvivalentne:*

(1) *τ je izometrija.*
(2) *$||x|| = ||\tau(x)||$ za vse $x \in \mathbb{R}^n$.*
(3) *$x^\mathsf{T} y = \tau(x)^\mathsf{T}\tau(y)$ za vse $x, y \in \mathbb{R}^n$.*
(4) *Matrika, ki pripada τ, je ortogonalna.*

Linearno izometrijo imenujemo ortogonalna *preslikava.*

Izrek 2. *Izometrijo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lahko enolično zapišemo kot*

$$\mathcal{A}v = Qv + a,$$

kjer je $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonalna matrika in $a \in \mathbb{R}^n$.

2. Ortogonalne preslikave = linearne izometrije

Izrek 3. *Vsaka ortogonalna preslikava $\tau\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je ena od naslednjih:*

(1) *Zrcaljenje čez premico $y = kx$, kjer $k = \tan\frac{\varphi}{2}$ in*

$$Z_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

je matrika, ki pripada τ v standardni bazi $\mathbb{R}^2$.

Lastni vrednosti zrcaljenja sta 1 in -1, pripadajoča lastna vektorja sta v smeri premice, čez katero zrcalimo (pri lastni vrednosti 1), ter v smeri vektorja, pravokotnega na premico (pri lastni vrednosti -1).

(2) *Rotacija za kot φ okoli koordinatnega izhodišča v pozitivni smeri in*

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

je matrika, ki pripada τ v standardni bazi $\mathbb{R}^2$.

Lastni vrednosti rotacije sta $\cos\varphi + i\sin\varphi$ *in* $\cos\varphi - i\sin\varphi$*, pripadajoča lastna vektorja pa imata kompleksne vrednosti (razen v primeru, ko je* $\varphi = k\pi$ *za* $k \in \mathbb{Z}$*).*

Izrek 4. *Vsaka ortogonalna preslikava* $\tau\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *je ena od naslednjih:*

(1) *Zrcaljenje čez ravnino* Σ *skozi koordinatno izhodišče* $(0,0,0)$*. V tem primeru ima* τ *dvojno lastno vrednost 1 in enojno lastno vrednost* -1*. Pri tem je ravnina zrcaljenja* $\Sigma = \mathcal{L}\{a,b\}$ *napeta na lastna vektorja* a *in* b *pri lastni vrednosti* 1*. Matrika, ki pripada* τ *v bazi* $\{a,b,n\}$*, je enaka*

$$A_\tau = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right],$$

kjer je n *normala na ravnino* Σ*.*

(2) *Rotacija okoli premice* p *skozi koordinatno izhodišče* $(0,0,0)$ *za kot* φ*. Pri tem ima* τ *lastne vrednosti* 1*,* $\cos\varphi + i\sin\varphi$ *in* $\cos\varphi - i\sin\varphi$ *in je os rotacije* p *napeta na lastni vektor* a *pri lastni vrednosti 1. Matrika, ki pripada* τ*, je tako v bazi* $\{a,b,c\}$ *enaka*

$$A_\tau = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{array}\right],$$

kjer sta vektorja b *in* c *pravokotna na* a*.*

(3) *Zrcalni zasuk, kjer je os rotacije* p *pravokotna na ravnino zrcaljenja* Σ*. Pri tem ima* τ *lastne vrednosti* -1*,* $\cos\varphi + i\sin\varphi$ *in* $\cos\varphi - i\sin\varphi$ *in je os rotacije* $p = \mathcal{L}\{n\}$ *napeta na lastni vektor* n *pri lastni vrednosti* -1*, kjer je* n *normala na* Σ*. Tako je matrika, ki pripada* τ*, v bazi* $\{n,a,b\}$ *enaka*

$$A_\tau = \left[\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{array}\right],$$

kjer je $\Sigma = \mathcal{L}\{a,b\}$*.*

3. Nadaljnje branje

ϟ (1) Joseph B. Kadane, Principles of Uncertainty, strani 198-201.

⋆ (2) Tomaž Košir, Linearna algebra, Razdelek 5.

⋆ (3) (še bolj geometrijski pogled) Walter Meyer, Geometry and Its Applications, 2006, Poglavje 4.

4. Domača naloga

ϟ (1) Rešite kviz na Učilnici.

ϟ (2) Zapišite primer izometrije $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki ni identiteta, vendar pa je $\mathcal{A}^3$ identična preslikava.

ϟϟ (3) Dokažite, da je vsaka rotacija v $\mathbb{R}^2$ kompozitum dveh zrcaljenj.

⋆ (4) Dokažite, da je vsaka rotacija v $\mathbb{R}^n$ kompozitum dveh zrcaljenj.

$\lightning$ (5) David Poole, Linear algebra, a modern introduction, Thomson, 2006, strani 374-375, exercises 29-32, 34.

(Naloge, označene s $\lightning$ preverjajo razumevanje osnovnih pojmov in so primeri nalog s teoretičnih izpitov, naloga označena s $\lightning\lightning$ pa je nekoliko težja. Naloga, označena s ⋆ je težja, širi vaše znanje in dopolnjuje odpredavano snov.)