Matematika 1 **Izročki: 6. teden**

Linearne preslikave

Polona Oblak

1. Definicija

Naj bosta V in U vektorska prostora. Preslikava $\tau\colon V \to U$ je *linearna preslikava*, če velja

(LP1) $\tau(v+u) = \tau(v) + \tau(u)$ za vsaka $v, u \in V$ in
(LP2) $\tau(\alpha v) = \alpha\tau(v)$ za vsak $v \in V$ in vsak $\alpha \in \mathbb{R}$.

Izrek 1. *Preslikava $\tau\colon V \to U$ je linearna natanko tedaj, ko velja*

$$\tau(\alpha v + \beta u) = \alpha\tau(v) + \beta\tau(u) \tag{1}$$

za vse $v, u \in V$ ter vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Trditev 1. *Za poljubno linearno preslikavo $\tau\colon V \to U$ velja $\tau(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_U$.*

2. Operacije z linearnimi preslikavami

Naj bodo $\tau, \psi\colon V \to U$ ter $\theta\colon U \to W$ linearne preslikave in naj bo $\gamma \in \mathbb{R}$.

(1) *Vsota $\tau + \psi\colon V \to U$* je preslikava, definirana s predpisom
$$(\tau + \psi)(v) = \tau(v) + \psi(v).$$
(2) *Produkt s skalarjem $\gamma\tau\colon V \to U$* je preslikava, definirana s predpisom
$$(\gamma\tau)(v) = \gamma\,\tau(v).$$
(3) *Kompozitum $\theta \circ \tau$* je preslikava $\theta \circ \tau\colon V \to W$ definirana s predpisom
$$(\theta \circ \tau)(v) = \theta(\tau(v)).$$

Izrek 2. *Vsota, produkt s skalarjem in kompozitum linearnih preslikav so linearne preslikave.*

Posledica 1. *Množica vseh linearnih preslikav iz vektorskega prostora V v vektorski prostor U je vektorski prostor.*

3. Matrike linearne preslikave

Naj bosta V in U vektorska prostora dimenzij m in n ter $\tau\colon V \to U$ linearna preslikava. Izberimo bazi $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ prostora V in $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ prostora U.

Denimo, da poznamo slike $\tau(b_1), \tau(b_2), \ldots, \tau(b_m)$ vektorjev baze $\mathcal{B}$ preko preslikave τ. Izberimo poljubni vektor $v \in V$ in ga zapišimo kot linearno kombinacijo

$$v = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_m b_m$$

baznih vektorjev množice $\mathcal{B}$. Ker je τ linearna preslikava, lahko nato sliko $\tau(v)$ vektorja izračunamo kot

$$\tau(v) = \tau\left(\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_m b_m\right) = \beta_1 \tau(b_1) + \beta_2 \tau(b_2) + \ldots + \beta_m \tau(b_m).$$

Tako smo ugotovili, da lahko s pomočjo slik baznih vektorjev izračunamo sliko poljubnega vektorja $v \in V$.

Sedaj pa razvijmo slike vektorjev baze $\mathcal{B}$, ki se nahajajo v vektorskem prostoru U, po bazi $\mathcal{C}$. Torej, za $j = 1, \ldots, m$, vsako sliko $\tau(b_j)$ zapišimo kot linearno kombinacijo vektorjev množice $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$:

$$\tau(b_j) = \alpha_{1j} c_1 + \alpha_{2j} c_2 + \ldots + \alpha_{nj} c_n.$$

S tem smo dobili $m \cdot n$ enolično določnih koeficientov α_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Naj bo $A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}} = [\alpha_{ij}]$ matrika reda $n \times m$ sestavljena iz koeficientov v razvoju slik baznih vektorjev $\mathcal{B}$ po bazi $\mathcal{C}$.

Tako definirano matriko

$$A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nm} \end{bmatrix}$$

imenujemo *matrika linearne preslikave τ iz baze $\mathcal{B}$ v bazo $\mathcal{C}$*.

V njej j-ti stolpec predstavlja koeficiente, s katerimi se slika j-tega vektorja baze $\mathcal{B}$ izraža kot linearna kombinacija vektorjev baze $\mathcal{C}$.

Matrika $A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}}$ nam torej preslika koeficiente v razvoju vektorja po bazi $\mathcal{B}$ v koeficiente, če sliko vektorja razvijemo po bazi $\mathcal{C}$. Povedano formalno, če je $v = \sum_{j=1}^{m} \beta_j b_j$ in $\tau(v) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i c_i$, potem lahko koeficiente γ_j dobimo tudi z matričnim množenjem

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Posebej opozorimo, da je matrika $A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}}$ odvisna od izbire baz $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$ vektorskih prostorov V in U. Če bi si izbrali drugačni bazi (ali vsaj eno od njiju), potem bi isti preslikavi priredili drugo matriko (ki ustreza koeficientom v razvoju po drugih bazah).

Dogovorimo se, da če bomo iskali matriko preslikave $\tau\colon V \to V$ iz baze $\mathcal{B}$ v bazo $\mathcal{B}$, bomo pri tem opustili enega od indeksov, t.j. $A_{\tau,\mathcal{B}} = A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{B}}$.

Izrek 3. *Naj bodo $\tau, \psi\colon V \to U$ ter $\theta\colon U \to W$ linearne preslikave in naj bo $\alpha \in \mathbb{R}$.*

(1) *Matrika, ki ustreza vsoti preslikav $\tau + \psi$, je enaka vsoti matrik posameznih preslikav.*
$$A_{\tau+\psi,\mathcal{B},\mathcal{C}} = A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}} + A_{\psi,\mathcal{B},\mathcal{C}}$$

(2) *Matrika, ki ustreza produktu s skalarjem $\alpha\tau$, je enaka večkratniku matrike preslikave.*
$$A_{\alpha\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}} = \alpha A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}}$$

(3) *Matrika, ki ustreza kompozitumu preslikav, je enaka produktu matrik posameznih preslikav.*
$$A_{\theta\circ\tau,\mathcal{B},\mathcal{D}} = A_{\psi,\mathcal{C},\mathcal{D}} \cdot A_{\theta,\mathcal{B},\mathcal{C}}$$

(4) *Matrika, ki ustreza inverzu obrnljive preslikave, je enaka inverzu matrike te preslikave. Torej, če je ψ obrnljiva preslikava, je obrnljiva tudi matrika $A_{\psi,\mathcal{B},\mathcal{C}}$. Velja*
$$A_{\psi^{-1},\mathcal{C},\mathcal{B}} = \left(A_{\psi,\mathcal{B},\mathcal{C}}\right)^{-1}.$$

Denimo, da poznamo matriko $A = A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}}$ linearne preslikave $\tau\colon V \to U$ iz baze $\mathcal{B}$ v $\mathcal{C}$. Radi bi zapisali matriko $A' = A_{\tau,\mathcal{B}',\mathcal{C}'}$ iste linearne preslikave τ, a iz neke (morda) druge baze $\mathcal{B}'$ v (morda) drugo bazo $\mathcal{C}'$.

Če si ogledamo spodnji diagram matrik, ki utrezajo preslikavam, potem poznamo "zeleno" matriko $A = A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}}$, želimo pa izračunati "rdečo" matriko $A' = A_{\tau,\mathcal{B}',\mathcal{C}'}$ linearne preslikave τ.

$$\begin{tikzcd}
(V,\mathcal{B}) \arrow[rr, "A"] \arrow[d, shift left, "P"] & & (U,\mathcal{C}) \arrow[d, "Q"'] \\
(V,\mathcal{B}') \arrow[rr, "A' = QAP^{-1}"'] \arrow[u, shift left, "P^{-1}"] & & (U,\mathcal{C}')
\end{tikzcd}$$

Pri tem matrika $P = \mathcal{I}_{V,\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ ustreza identični preslikavi prostora V vase iz baze $\mathcal{B}$ v bazo $\mathcal{B}'$. Takšno matriko dobimo s koeficienti pri razvoju vektorjev baze $\mathcal{B}$ po vektorjih baze $\mathcal{B}'$. Podobno je $Q = \mathcal{I}_{U,\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ ustreza identični preslikavi prostora U vase iz baze $\mathcal{C}$ v bazo $\mathcal{C}'$ in je sestavljena iz koeficientov pri razvoju vektorjev baze $\mathcal{C}$ po vektorjih baze $\mathcal{C}'$. Če se v diagramu sprehodimo po puščicah, vidimo, da bomo morali matriko A' sestaviti kot kompozitum preslikav. Zatorej je A' enak produktu pripadajočih matrik, t.j.

$$A' = QAP^{-1}.$$

4. Lastne vrednosti linearne preslikave

Neničelnemu vektorju $v \in V$ pravimo *lastni vektor* linearne preslikave $\tau\colon V \to V$, če velja

$$\tau(v) = \lambda v.$$

Številu λ pravimo *lastna vrednost* linearne preslikave τ.

Izrek 4. *Vsaka lastna vrednost linearne preslikave τ je tudi lastna vrednost poljubne matrike A_τ, ki pripada preslikavi τ. Vse matrike, ki pripadajo dani linearni preslikavi τ imajo enake lastne vrednosti.*

Pravimo, da je linearno preslikavo $\tau\colon V \to V$ mogoče *diagonalizirati*, če obstaja baza, v kateri pripada preslikavi τ diagonalna matrika.

Izrek 5. *Linearno preslikavo $\tau\colon V \to V$ je mogoče diagonalizirati natanko tedaj, ko obstaja baza prostora V sestavljena iz lastnih vektorjev preslikave τ.*

5. Jedro in slika linearne preslikave

Naj bo $\tau\colon V \to U$ linearna preslikava vektorskega prostora V v vektorski prostor U.

Definicija 1. Jedro *linearne preslikave τ je množica $\ker(\tau)$ vseh vektorjev $v \in V$, za katere velja*

$$\tau(v) = 0.$$

Definicija 2. Slika *linearne preslikave je množica $\mathrm{im}(\tau) = \{\tau(v)\colon v \in V\} \subseteq U$.*

Izrek 6. *Jedro $\ker\tau$ linearne preslikave $\tau\colon V \to U$ je vektorski podprostor v V, slika $\mathrm{im}\,\tau$ pa vektorski podprostor v U.*

Izrek 7. *Naj bo $\tau\colon V \to U$ linearna preslikava iz vektorskega prostora V v vektorski prostor U.*

(1) *τ je injektivna natanko tedaj, ko je $\ker\tau = \{0\}$.*
(2) *τ je surjektivna natanko tedaj, ko je $\mathrm{im}\,\tau = U$.*

Naj bo A_τ matrika, ki pripada linearni preslikavi $\tau\colon V \to U$ iz baze $\mathcal{B}$ v bazo $\mathcal{C}$. Po definiciji je jedro linearne preslikave τ množica vseh vektorjev v, za katere velja $\tau(v) = 0$. Če razvijemo vektor v po bazi $\mathcal{B}$, so koeficienti v razvoju določeni s stolpcem $x = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m]^T$. Spomnimo se enakosti (2). Ker ima slika $\tau(v) = 0$ v razvoju po bazi $\mathcal{C}$ vse koeficiente enake 0, velja $A_\tau x = 0$. (Z drugimi besedami, vektorji koeficientov v razvoju vektorjev iz $\ker\tau$ po bazi $\mathcal{B}$ ustrezajo natanko ničelnemu prostoru matrike A_τ.)

Podobno si pomagamo z enakostjo (2), da bi določili $\operatorname{im}\tau$. Po definiciji je $\operatorname{im}\tau$ množica vseh slik linearne preslikave, torej množica vseh linearnih kombinacij slik vektorjev iz baze $\mathcal{B}$. Z drugimi besedami,

$$\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \\ \vdots\\ \\ \gamma_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m}\\ \\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nm}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{bmatrix} = A^{(1)}\beta_1 + A^{(2)}\beta_2 + \ldots + A^{(m)}\beta_m,$$

kjer z A^j označimo j-ti stolpec matrike $A_\tau = [\alpha_{ij}]$. Torej so vektorji koeficientov $[\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n]^T$ natanko vse linearne kombinacije stolpcev matrike A_τ. Sledi, da linearna ogrinjača stolpcev natanko določa koeficiente vektorjev v $\operatorname{im}\tau$ pri razvoju po bazi $\mathcal{C}$. (Z drugimi besedami, koeficienti pri razvoju vektorjev iz $\operatorname{im}\tau$ po bazi $\mathcal{C}$ ustrezajo stolpčnemu prostoru matrike A_τ.)

Izrek 8. *Naj bo $\tau\colon V \to U$ linearna preslikava in naj bo $A = A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}}$ matrika, ki pripada preslikavi τ. Potem je*

(1) $\dim(\operatorname{im}(\tau)) = \operatorname{rank}(A)$,
(2) $\dim(\ker(\tau)) + \dim(\operatorname{im}(\tau)) = \dim(V)$.

Posledica 2. *Naj bo $\tau\colon V \to U$ linearna preslikava,* $\dim V = \dim U = n$ *in naj bo A neka matrika, ki pripada τ. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

(1) *τ je bijektivna.*
(2) *τ je injektivna.*
(3) *τ je surjektivna.*
(4) *A je obrnljiva.*
(5) $\ker\tau = \{\mathbf{0}\}$.
(6) $N(A) = \{\mathbf{0}\}$.
(7) $\operatorname{im}\tau = U$.
(8) $C(A) = \mathbb{R}^n$.
(9) *Rang matrike A je n.*
(10) *Vrstice matrike A so linearno neodvisne.*
(11) *Vrstice matrike A razpenjajo $\mathbb{R}^n$.*
(12) *Vrstice matrike A tvorijo bazo $\mathbb{R}^n$.*
(13) *Stolpci matrike A so linearno neodvisni.*
(14) *Stolpci matrike A razpenjajo $\mathbb{R}^n$.*
(15) *Stolpci matrike A tvorijo bazo $\mathbb{R}^n$.*

(16) $\det A \neq 0$.
(17) *Homogeni sistem enačb $Ax = 0$ ima le trivialno rešitev.*
(18) *Sistem enačb $Ax = b$ ima rešitev za vsak $b \in \mathbb{R}^n$.*

6. Nadaljnje branje

(1) David Poole, Linear algebra, a modern introduction, Thomson, 2006, Razdelki 6.4.-6.7.
(2) Tomaž Košir, Linearna algebra, poglavje VII: Linearne preslikave.

7. Domača naloga

$\lightning$ (1) Rešite kviz na Učilnici.
$\lightning$ (2) Dokažite izreka 2 and 7 ter posledico 2.
$\lightning$ (3) Naj bosta $u, v \in V$ linearno neodvisna lastna vektorja linearne preslikave $\tau \colon V \to V$. Če je $u + v$ tudi lastni vektor za τ, potem pokažite, da u in v pripadata isti lastni vrednosti.
$\lightning$ (4) Dokažite, da nobena linearna preslikava $\tau : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}_4[x]$ ni injektivna.
$\lightning$ (5) Definirajmo preslikavo $\tau : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}$ s predpisom $\tau(A) = \mathrm{tr}(A)$.
  (a.) Pokažite, da je τ linearna.
  (b.) Zapišite matriko, ki pripada τ v standardnih bazah $\mathbb{R}^{3\times 3}$ in $\mathbb{R}$.
  (c.) Določite $\ker \tau$ in $\mathrm{im}\, \tau$.
$\lightning$ (6) Definirajmo preslikavo $\tau : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ s predpisom $\tau(p(x)) = x^2 p'(x)$.
  (a) Pokažite, da je τ linearna.
  (b) Zapišite matriko, ki ustreza preslikavi τ v standardnih bazah $\mathbb{R}_1[x]$ in $\mathbb{R}_2[x]$.
  (c) Določite $\ker \tau$ in $\mathrm{im}\, \tau$.
$\lightning$ (7) Aleksandra Franc, Rešene naloge iz linearne algebre, naloge poglavja 5.
$\lightning$ (8) David Poole, Linear algebra, a modern introduction, Thomson, 2006,
  (a) strani 484-485, naloge 1-36,
  (b) strani 499-500, naloge 1-20,
  (c) strani 516-518, naloge 1-44,
  (d) strani 536-537, review questions 1-20.

(Naloge, označene s $\lightning$ preverjajo razumevanje osnovnih pojmov in so primeri nalog s teoretičnih izpitov.)