Matematika 1 **Izročki, 2.teden**

Schurov izrek, Frobeniusova norma matrike, izrek Eckarta in Younga

Polona Oblak

1. Schurov izrek in njegove posledice

Izrek 1 (Schur)**.** *Naj ima matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lastne vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Tedaj obstaja takšna ortogonalna matrika $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da je*

$$Q^\mathsf{T} A Q$$

zgornje trikotna $n \times n$ matrika z diagonalnimi elementi enakimi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Opazimo:

- V izreku 1 lahko zgornjo trikotnost nadomestimo s spodnjo trikotnostjo.
- Pri tem niti matrika Q niti $Q^\mathsf{T} A Q$ nista enolično določeni z matriko A.

Posledica 1. *Vsaka matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je podobna zgornje trikotni matriki.*

Posledica 2. *Vsaka simetrična matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je ortogonalno podobna diagonalni matriki.*

Posledica 3. *Če ima matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lastne vrednosti enake $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, potem je*

$$\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

in

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n.$$

Posledica 4 (Cayley-Hamilton)**.** *Če je $\Delta_A(x) = \det(A - xI_n)$ karakteristični polinom matrike A, potem velja $\Delta_A(A) = 0$.*

Izrek 2 (SVD - Razcep singularnih vrednosti)**.** *Za vsako matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, obstajajo takšna matrika*

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

ter ortogonalni matriki $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ in $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da velja

$$A = U\,\Sigma\,V^\mathsf{T}.$$

2. Frobeniusova norma matrike

Za matriki $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ definiramo

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B).$$

Izrek 3. *Za produkt $\langle A, B\rangle \colon \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ velja za vse matrike $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$*

(1) $\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$,
(2) $\langle \alpha A + \beta B, C\rangle = \alpha\langle A, C\rangle + \beta\langle B, C\rangle$, *za vse* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
(3) $\langle A, A\rangle \geq 0$,
(4) $\langle A, A\rangle = 0$ *natanko tedaj, ko je* $A = 0$.

Zato $\langle A, B\rangle$ imenujemo skalarni produkt *matrik A in B.*

Izrek 4. *Za matrike $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ in $C \in \mathbb{R}^{k\times n}$ velja*

$$\langle A, BC\rangle = \left\langle B^\mathsf{T} A, C\right\rangle = \left\langle AC^\mathsf{T}, B\right\rangle.$$

Frobeniusova norma matrike $A = [a_{i,}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je definirana kot

$$||A||_F = ||A|| = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{\operatorname{tr}(A^T A)}.$$

Velja:

$$||A||_F^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} \sigma_i^2.$$

Izrek 5 (Eckart, Young)**.** *Naj bo $A = U\Sigma V^\mathsf{T}$ razcep singularnih vrednosti matrike $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, kjer $U = [U^{(1)}\, U^{(2)} \dots U^{(m)}] \in \mathbb{R}^{m\times m}$ in $V = [V^{(1)}\, V^{(2)} \dots V^{(n)}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Potem je matrika $A_k \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ranga k, $k \leq n$, ki je med vsemi matrikami ranga k v Frobeniusovi normi najbližje matriki A, enaka*

$$A_k = \sigma_1 U^{(1)}(V^{(1)})^\mathsf{T} + \sigma_2 U^{(2)}(V^{(2)})^\mathsf{T} + \ldots + \sigma_k U^{(k)}(V^{(k)})^\mathsf{T}$$

in velja $||A - A_k||_F = \sqrt{\sigma_{k+1}^2 + \ldots + \sigma_n^2}$. (Velja torej $||A - A_k||_F \leq ||A - X||_F$ za vse matrike $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$, za katere velja $\operatorname{rank}(X) = k$.)

3. Nadaljnje branje

(1) Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge, 2006, razdelka 2.3 and 2.4.
(2) več matričnih norm: Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge, 2006, razdelek 5.6.
(3) Gilbert Strang, *Linear algebra and Learning from Data*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 2019, razdelek I.9.

4. Domača naloga

- ϟ (1) Rešite kviz na spletni Učilnici.
- ⋆ (2) Uporabite Schurov izrek, da dokažete, da je rang kvadratne matrike A enak velikosti največje obrnljive (kvadratne) podmatrike matrike A.
- ⋆ (3) Dokažite Cayley-Hamiltonov izrek, posledica 4.
- ϟ (4) Pokažite, da za simetrično matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja

$$||A||_F = \sqrt{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2},$$

  kjer so $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ lastne vrednosti matrike A. Pokažite na primeru, da enakost ne velja za nesimetrične matrike.
- ϟ (5) Naj bo $A = PDP^{-1}$ simetrična matrika. Pokažite, da je najboljša aproksimacija ranga ena matrike A v Frobeniusovi normi enaka $\lambda_1 v_1 v_1^{\mathsf{T}}$, kjer je λ_1 po absolutni vrednosti največja lastna vrednost matrike A, v_1 pa normirani lastni vektor, ki pripada λ_1.
- ⋆ (6) Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge, 2006, nalogi 2.3.P6 (str.107) in 2.4.P2 (str.124).

(Naloge, označene s ϟ preverjajo razumevanje osnovnih pojmov in so primeri nalog s teoretičnih izpitov. Naloge, označene s ⋆ so težje, širijo vaše znanje in dopolnjujejo odpredavano snov.)

5. Rešitve nalog

(2) Naj ima matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lastne vrednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Po Schurovem izreku obstajata takšna ortogonalna matrika $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in takšna zgornje trikotna matrika $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$ z diagonalnimi elementi $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, da je $Q^\mathsf{T} A Q = Z$.

Matrika Z je zgornje trikotna, zato lahko s permutacijo vrstic (množenje Z s permutacijsko matriko $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ z leve) in s permutacijo stolpcev (množenje Z s permutacijsko matriko $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ z desne) dosežemo, da bo matrika PZR oblike

$$PZR = \begin{bmatrix} Z_1 & X \\ 0 & Z_2 \end{bmatrix},$$

kjer je $Z_1 \in \mathbb{R}^{r\times r}$ obrnljiva zgornje trikotna matrika, $Z_2 \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ pa zgornje trikotna matrika z ničlami na diagonali. To pomeni, da ima matrika PZR obrnljivo $r\times r$ podmatriko Z_1 in da velja $\operatorname{rank}(Z) \geq \operatorname{rank} Z_1 = r$. Še več, ker ima Z_2 na diagonali ničelne vrednosti, ima vsaka $(r+1)\times(r+1)$ podmatrika matrike Z ničelno determinanto.

Matrika $Z = P^\mathsf{T} A R^\mathsf{T}$ ima tako tudi obrnljivo $r \times r$ podmatriko (vendar morda ne več v zgornjem levem vogalu) in posledično jo ima tudi matrika $A = QZQ^\mathsf{T}$ (saj je Q obrnljiva). Ker sta matriki A in Z podobni, je torej $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(Z) \geq r$. Zatorej je $\operatorname{rank}(A)$ enak velikosti največje obrnljive podmatrike matrike A (=največji možni r).