Matematika 1 **Izročki: Teden 1**

Ponovitev: matrike, sled, rang, lastne vrednosti,...

Polona Oblak

1. Sled

Sled matrike $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (oznaka: $\mathrm{tr}(A)$) je vsota vseh njenih diagonalnih elementov

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Lastnosti sledi. Za matrike $A, B, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja

(1) $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha\,\mathrm{tr}(A)$,
(2) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$,
(3) $\mathrm{tr}(A^{\mathsf{T}}) = \mathrm{tr}(A)$,
(4) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$,
(5) $\mathrm{tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$ za vsako obrnljivo matriko P.

2. Rang

Rang matrike $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (oznaka: $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rk}(A)$) je

- število pivotov, ki jih dobimo v (reducirani) vrstično stopničasti obliki matrike A po Gaussovi eliminaciji
- število linearno neodvisnih vrstic matrike A,
- dimenzija linearne ogrinjače vrstic matrike A,
- število linearno neodvisnih stolpcev matrike A,
- dimenzija linearne ogrinjače stolpcev matrike A,
- $\dim C(A)$,
- $n - \dim N(A)$,
- velikost največje obrnljive (kvadratne) podmatrike matrike A.

3. Podobnost

Matriki $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sta *podobni*, če obstaja takšna obrnljiva matrika $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da je

$$A = PBP^{-1}.$$

Podobne matrike imajo isto:

(1) sled,
(2) determinanto,

(3) karakteristični polinom,
(4) lastne vrednosti,
(5) rang.

4. Do naslednjega tedna

(1) Pokažite naslednje enakosti in neenakosti, ki veljajo za rang matrik:
  (a) $\operatorname{rank}(A^{\mathsf{T}}) = \operatorname{rank}(A)$,
  (b) $\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank}(A)$ in $\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank}(B)$,
  (c) $\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}([A|B])$,
  (d) $\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$,
  (e) $\operatorname{rank}([A|B]) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$, kjer je za $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$ matrika $[A|B] \in \mathbb{R}^{m\times(n+p)}$ razširjena matrika matrik A in B,
  (f) $\operatorname{rank}(A \oplus B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$, kjer je za $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ matrika $A \oplus B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+p)\times(n+q)}$ direktna vsota matrik A in B.

  (Pri tem naj bosta matriki A in B v posameznih alinejah primernih velikosti za množenje, seštevanje,...)

(2) Rešite kviz in preverite vaše znanje osnovnih pojmov linearne algebre.

5. Nadaljnje branje

(1) David A. Harville: Matrix Algebra From a Statistian's Perspective, Springer, 1997, razdelek 5.
(2) 3Blue1Brown, Essence of linear algebra

6. (Priporočljiva) domača naloga

(1) David A. Harville: Matrix Algebra From a Statistian's Perspective, Springer, 1997, stran 53 (Exercise 1, 2, 3).
(2) Dokažite, da je podobnost matrik tranzitivna lastnost.
(3) Dokažite, da imajo podobne matrike isti karakteristični polinom.