Linearna algebra	**4. teden**

Matrike in lastnosti matričnih operacij. Inverzna matrika.

Polona Oblak

1. Novo definirani pojmi

- Lastnosti vsote matrik in množenja matrik s skalarji, video. Za poljubne matrike $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in skalarje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ veljajo naslednje lastnosti.
  - $A + B = B + A$ (komutativnost)
  - $A + (B + C) = (A + B) + C$ (asociativnost)
  - *Ničelna matrika*
  $$O_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$
  velikosti $m \times n$ je matrika, za katero velja $A + O_{m\times n} = O_{m\times n} + A = A$. Indeks $m \times n$ bomo opuščali, če bo iz konteksta jasno, kako velika je ničelna matrika O.
  - *Nasprotna matrika* $-A = (-1)A$ je matrika, za katero velja $A+(-A) = (-A)+A = O$
  - $\beta(\alpha A) = (\beta\alpha)A$
  - $1 \cdot A = A$, $0 \cdot A = O$
  - $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ in $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (distributivnost matričnega množenja s skalarjem čez seštevanje matrik in čez seštevanje skalarjev)
  - ↯ Naloga 1: Ali za poljubni matriki $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in neničelni skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ velja
    - $\operatorname{rang}(\alpha A) = \alpha \operatorname{rang}(A)$?
    - $\operatorname{rang}(A + B) = \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B)$?

    Če trditev velja, jo dokažite. Če ne, poiščite protiprimer.
- Lastnosti matričnega množenja.
  - ↯ Naloga 2: Ali za poljubni matriki $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ velja
    - $O_{m\times n} \cdot B = A \cdot O_{n\times p} = O_{m\times p}$?
    - $AB = BA$?
    - $\operatorname{rang}(AB) = \operatorname{rang}(A) \operatorname{rang}(B)$?

    Če trditev velja, jo dokažite. Če ne, poiščite protiprimer.
  - Matrično množenje je asociativno:
  $$A(BC) = (AB)C$$
  za $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ in $C \in \mathbb{R}^{p\times r}$.
  - Definicija *potence* matrike. Za $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiramo
  $$A^0 = I_n$$
  $$A^k = A \cdot A^{k-1}$$

- Matrično množenje je distributivno:
$$A(B+C) = AB + AC \text{ in } (A+D)C = AD + DC$$
za $A, D \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B, C \in \mathbb{R}^{n\times p}$.
- *Identična matrika*
$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$
velikosti $n \times n$ je matrika, za katero velja $A \cdot I_n = I_m \cdot A = A$ za vsako $m \times n$ matriko A.

- *Inverz* matrike.
  - Definicija, video.
  - Računanje inverza, video. V njem boste med drugim spoznali algoritem za računanje inverza kvadratne matrike: Inverz obrnljive matrike $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s pomočjo Gaussovih elementarnih operacij izračunamo na naslednji način:
    (1) Zapišemo zelo razširjeno matriko
    $$[A \,|\, I_n] \in \mathbb{R}^{n\times 2n},$$
    (2) nato na njej izvajamo Gaussove elementarne operacije.
      (a) V kolikor $\operatorname{rang}(A) < n$, matrika A ni obrnljiva in njen inverz ne obstaja.
      (b) Če je $\operatorname{rang}(A) = n$, potem izvajamo Gaussove elementarne operacije toliko časa, da na prvih n stolpcih pridobimo identično matriko I_n
      $$[A \,|\, I_n] \sim \ldots \sim [I_n \,|\, B].$$
      Inverz matrike A je enak $A^{-1} = B$.
  - Če je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, potem so naslednje trditve ekvivalentne:
    (1) A je obrnljiva.
    (2) $\operatorname{rang}(A) = n$.
    (3) Homogeni sistem $A\vec{x} = \vec{0}$ ima le trivialno rešitev $\vec{x} = \vec{0}$.
    (4) Za vsak vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ima sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ natanko eno rešitev.
  - ϟ Naloga 3: Izračunajte inverz 3×3 spodnje trikotne matrike
  $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}.$$
  - *Diagonalna matrika* je kvadratna matrika, ki ima vse izvendiagonalne elemente enake 0. *Zgornje trikotna matrika* ima vse elemente pod diagonalo enake 0. *Spodnje trikotna matrika* ima vse elemente nad diagonalo enake 0.
  - ϟ Naloga 4: Pokažite, da je
    (1) inverz obrnljive diagonalne matrike diagonalna matrike,
    (2) inverz obrnljive zgornje trikotne matrike zgornje trikotna matrika in

(3) inverz obrnljive spodnje trikotne matrike spodnje trikotna matrika.
- Za obrnljivi matriki $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja
  - $(A^{-1})^{-1} = A$,
  - $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,
- ↯ Naloga 5: Če sta kvadratni matriki $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljivi in velja $(AB)^2 = A^2B^2$, potem pokažite, da matriki A in B komutirata ($AB = BA$).

- *Transponirana matrika* ali *transponiranka*. video.
  - $(A^\top)^\top = A$,
  - $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$,
  - $(\alpha A)^\top = \alpha A^\top$.
  - $(AB)^\top = B^\top A^\top$,
  - Inverz transponirane matrike (in transponiranka produkta matrik), video:
    - $(AB)^\top = B^\top A^\top$,
    - $(A^{-1})^\top = \left(A^\top\right)^{-1}$.
  - Primer: Naj bosta $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. Izračunajte tiste izmed produktov AB, BA, $A^\top B$, $AB^\top$, ki jih lahko. (Rešitev.)
  - Matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je *simetrična*, če velja $A^\top = A$.
  - ↯ Naloga 6: Pokažite, de je
    - vsota simetričnih matrik simetrična matrika,
    - produkt simetričnih matrik simetrična matrika natanko tedaj, ko matriki komutirata,
    - inverz obrnljive simetrične matrike simetrična matrika.
- Zapiski predavanj 2019/20, 4. teden.

2. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Razdelek 2.3.
(2) Polona Oblak: Matematika, Razdelek 6.3.
(3) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Section 2.5.
(4) David Poole: Linear Algebra, a modern introduction, 2006, Sections 3.1, 3.2., 3.3..

3. Ali razumem snov?

↯(1) Kdaj je 2×2 matrika
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
obrnljiva? V primeru, ko je obrnljiva, kaj je njen inverz A^{-1}?

↯(2) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva matrika. Pokažite, da je tudi matrika A^3 obrnljiva.

↯(3) Naj bosta $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljivi matriki. Koliko rešitev $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ima enačba $B^{-1}(I_n + AX)B = B + I_n$?

↯(4) Naj bo $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ poljuben neničeln vektor.

(a) Pokažite, da je matrika $\vec{a}\vec{a}^\top$ simetrična matrika.
(b) Pokažite, da je matrika $\vec{a}\vec{a}^\top$ matrika ranga 1.

$\lightning$(5) Če sta A in B obrnljivi $n \times n$ matriki, katere od naslednjih trditev so resnične?

(a) $(A^{-1})^{-1} = A$
(b) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$
(c) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
(d) $(A^2)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^2$
(e) AB je obrnljiva
(f) $A + B$ je obrnljiva

$\lightning$(6) Drži ali ne drži?
(a) Naj bosta $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljivi matriki. Za vsako $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ima enačba $AXB^{-1} = C$ natanko eno rešitev.
(b) Za vsako 4×4 matriko, ki ima zadnjo vrstico enako prvi, velja, da ni obrnljiva.
(c) Vsaka zgornje trikotna matrika je obrnljiva.
(d) Če je matrika A obrnljiva, ima sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ neskončno rešitev.
(e) Naj bo matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva. Ali obstaja obrnljiva matrika $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, za katero velja $AXA + A = 0$?

$\lightning$(7) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Naloge 31-35, 40-42.