Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
Σ	

1. kolokvij iz Matematike 1

11. januar 2023

Čas pisanja: **90 minut**. *Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 za pomoč. Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, pametnega telefona in ostalih elektronskih naprav je* **strogo** *prepovedano.*

1. naloga (35 točk)

Za dani (fiksni) vrednosti a in b, za katere velja $a > 0, b > 0$, definiramo *polarne eliptične koordinate* s predpisom

$$x = a\,r\cos(\varphi)$$
$$y = b\,r\sin(\varphi),$$

kjer je $r \geq 0$ in $\varphi \in [0, 2\pi)$.

a) (10 točk) Izračunaj Jacobijevo matriko $J_{\mathbf{F}}$ preslikave $\mathbf{F} : (r, \varphi) \mapsto (x, y)$ in pripadajočo determinanto $\det(J_{\mathbf{F}})$.

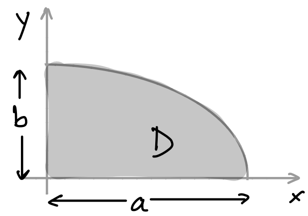
$$J_{\vec{F}} = \begin{bmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{bmatrix}. \qquad \det(J_{\vec{F}}) = abr\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = abr.$$

b) (25 točk) S pomočjo polarnih eliptičnih koordinat izračunaj dvojni integral

$$I := \iint_D \frac{1}{ab} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} e^{-\frac{y^2}{2b^2}}\, dx\,dy$$

na območju

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$



$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \frac{1}{ab}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)} \cdot abr\,dr \right) d\varphi = \frac{\pi}{2} \int_0^1 r e^{-r^2/2}\, dr = \frac{\pi}{2} \int_{-1/2}^{0} e^t\, dt =$$

($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$; $t = -\frac{r^2}{2}$, $dt = -r\,dr$)

$$= \frac{\pi}{2} e^t \Big|_{t=-1/2}^{t=0} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{\pi\left(\sqrt{e} - 1\right)}{2\sqrt{e}}.$$

2. naloga (35 točk)

Funkcija treh spremenljivk f ima predpis

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^2 + 12xyz.$$

a) (15 točk) Poišči stacionarne točke funkcije f. Pišimo $t = x^2+y^2+z^2$. Tedaj:

$$(1)\ f_x = 4xt + 12yz = 0 \ \dots\ t = -\frac{4yz}{x}$$
$$(2)\ f_y = 4yt + 12xz = 0 \ \dots\ t = -\frac{4xz}{y}$$
$$(3)\ f_z = 4zt + 12xy = 0 \ \dots\ t = -\frac{4xy}{z}$$

$$\frac{yz}{x} = \frac{xz}{y} \ /\cdot xy \ \dots\ y^2z = x^2z \ \dots\ z(x^2-y^2) = 0 \quad (*)$$

$$\frac{xz}{y} = \frac{xy}{z} \ /\cdot yz \ \dots\ xz^2 = xy^2 \ \dots\ x(y^2-z^2) = 0 \quad (**)$$

$(*)$ ... $z = 0$ ali $y = \pm x$ (tj. $x^2 = y^2$)

$z = 0$:

(1) ... $xt = 0$

(2) ... $yt = 0$

$\Rightarrow x = 0,\ y = 0$

$T_1(0,0,0)$

$y = \pm x$:

(1) ... $\pm 4z = -t$

(2) ... $\pm 4z = -t$

(3) ... $\pm 4\frac{x^2}{z} = -t$

$\Rightarrow x^2 = z^2$

I. $y = x,\ z = x$,

II. $y = -x,\ z = -x$,

$3x^3 + 3x^2 = 0$

$3x^2(x+1) = 0$

$x = -1$

$T_2(-1,-1,-1)$

$T_3(-1,1,1)$

III. $y = -x,\ z = x$

$3x^3 - 3x^2 = 0$

$3x^2(x-1) = 0$

$x = 1$

$T_4(1,-1,1)$

IV. $y = x,\ z = -x$

$3x^3 - 3x^2 = 0$

$x = 1$

$T_5(1,1,-1)$

b) (20 točk) Poišči Hessejevo matriko funkcije f. Ali lahko na podlagi Hessejeve matrike f določiš tip katere od zgoraj izračunanih stacionarnih točk?

$$H_f = \begin{bmatrix} 4t+8x^2 & 8xy+12z & 8xz+12y \\ 8xy+12z & 4t+8y^2 & 8yz+12x \\ 8xz+12y & 8yz+12x & 4t+8z^2 \end{bmatrix}$$

$$H_f(T_1) = \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix}$$ .... ne moremo določiti tipa T_1.

$$H_f(T_2) = \begin{bmatrix} 20&-4&-4\\-4&20&-4\\-4&-4&20 \end{bmatrix}$$ $20>0$, $20^2-4^2>0$, $\det(H_f(T_2))>0$ ... T_2 je lokalni minimum.

$$H_f(T_3) = \begin{bmatrix} 20&4&4\\4&20&-4\\4&-4&20 \end{bmatrix}$$ Vse tri glavne poddeterminante so >0 .. T_3 je lokalni minimum.

$$H_f(T_4) = \begin{bmatrix} 20&4&-4\\4&20&4\\-4&4&20 \end{bmatrix}$$

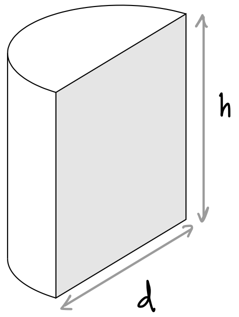
$$H_f(T_5) = \begin{bmatrix} 20&-4&4\\-4&20&4\\4&4&20 \end{bmatrix}$$

Tudi ti dve sta pozitivno definitni ... T_2, T_3, T_4, T_5 so lokalni minimi.

(Drugače: $H_f(T_2), \dots, H_f(T_5)$ so strogo diagonalno dominantne (in simetrične) torej pozitivno definitne.)

3. naloga (30 točk)

Za posebno omejeno izdajo želijo pri nekem proizvajalcu pijač izdelati pločevinko s prostornino V_0 v obliki polovice valja. Kolikšno naj bo razmerje med premerom in višino tega valja, da bodo za pločevinko take oblike pri dani prostornini V_0 porabili čimmanj pločevine?



$$V_0 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h = \frac{1}{8}\pi d^2 h.$$

$$A = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \pi\frac{d}{2}h + dh = \frac{\pi d^2}{4} + \left(\frac{\pi}{2}+1\right)dh.$$

Iščemo minimum $A(d,h) = \frac{\pi d^2}{4} + \left(\frac{\pi}{2}+1\right)dh$ pri pogoju $V_0 = \frac{\pi}{8}d^2 h$.

$$L(d,h,\lambda) = \frac{\pi d^2}{4} + \left(\frac{\pi}{2}+1\right)dh - \lambda\left(8V_0 - \pi d^2 h\right).$$

$$L_d = \frac{\pi d}{2} + \left(\frac{\pi}{2}+1\right)h + 2\lambda\pi dh = 0 \;\ldots\; -\lambda = \frac{\pi d + (\pi+2)h}{4\pi dh}$$

$$L_h = \left(\frac{\pi}{2}+1\right)d + \lambda\pi d^2 = 0 \;\ldots\ldots\; -\lambda = \frac{(\pi+2)d}{2\pi d^2}$$

$$L_\lambda = \ldots$$

$$\frac{\pi d + (\pi+2)h}{4\pi dh} = \frac{\pi+2}{2\pi d}$$

$$\pi d + (\pi+2)h = 2(\pi+2)h \;\ldots\; \frac{d}{h} = \frac{\pi+2}{\pi}$$

← razmerje med premerom in višino.