Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
Σ	

2. kolokvij iz Matematike 1

13. januar 2022

Čas pisanja: **90 minut**. *Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 za pomoč. Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, pametnega telefona in ostalih elektronskih naprav je* **strogo** *prepovedano.*

1. naloga (35 točk)

Telo $D \subseteq \mathbb{R}^3$ opišemo z neenakostmi

$$z^2 + x^2 + y^2 \leq 3\,,\ \ z^2 - x^2 - y^2 \geq 1 \ \text{ ter } \ z \geq 0.$$

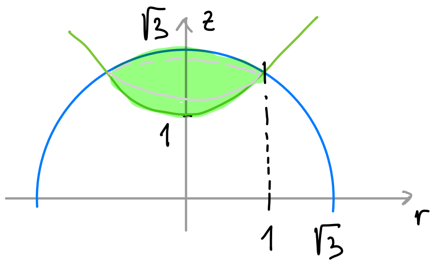
a) (10 točk) Opiši to telo v valjnih koordinatah

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi,$$
$$z = z,$$

in ga skiciraj v (r,z)-ravnini (pri poljubnem kotu φ).

b) (25 točk) Izračunaj maso telesa D, če je njegova gostota enaka $\rho(x,y,z) = z$.

(a) $x^2+y^2 = r^2 \ \ldots \ \underline{z^2+r^2 \leq 3}\ ,\ \underline{z^2-r^2 \geq 1}\,,\ z \geq 0$



$$-\begin{cases} z^2+r^2=3 \\ z^2-r^2=1 \end{cases}$$
$$2r^2 = 2 \ \ldots \ r^2 = 1$$

(b)

$$\boxed{m =} \iiint_D z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\int_{\sqrt{1+r^2}}^{\sqrt{3-r^2}} z\cdot r\,dz\right)dr\right)d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(r\,\frac{z^2}{2}\Bigg|_{z=\sqrt{1+r^2}}^{z=\sqrt{3-r^2}} \right) dr = 2\pi \int_0^1 \frac{r}{2}\big(\underbrace{3-r^2-1-r^2}_{2-2r^2}\big)\,dr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 (r - r^3)\,dr = 2\pi\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1} \boxed{= \frac{\pi}{2}}\,.$$

2. naloga (35 točk)

Funkcija treh spremenljivk f ima predpis

$$f(x,y,z) = (2x+2y+z)^3 - 3(x^2+y^2+z).$$

a) (10 točk) Poišči gradient in Hessejevo matriko funkcije f.

b) (15 točk) Poišči stacionarne točke funkcije f.

c) (10 točk) Katere od teh stacionarnih točk so lokalni minimi oz. lokalni maksimi?

Namig: Pri računanju lahko izraz $(2x+2y+z)$ večino časa obravnavaš kot celoto.

(a)

$$\operatorname{grad} f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(2x+2y+z)^2 - 6x \\ 6(2x+2y+z)^2 - 6y \\ 3(2x+2y+z)^2 - 3 \end{bmatrix},$$

$$Hf = \begin{bmatrix} 24(2x+2y+z) - 6, & 24(2x+2y+z), & 12(2x+2y+z) \\ 24(2x+2y+z), & 24(2x+2y+z)-6, & 12(2x+2y+z) \\ 12(2x+2y+z), & 12(2x+2y+z), & 6(2x+2y+z) \end{bmatrix}.$$

(b) $\operatorname{grad} f = \vec{0} \ \ldots$

$x = (2x+2y+z)^2 \ \ldots \ x = 1$

$y = (2x+2y+z)^2 \ \ldots \ y = 1$

$1 = (2x+2y+z)^2 \ \ldots \ 2x+2y+z = \pm 1 \ \ldots \ 4+z = \pm 1$

$z = -4 \pm 1$

$T_1(1,1,-5), \ T_2(1,1,-3)$

(c) $T_1: \ H_f(1,1,-5) = \begin{bmatrix} -30 & -24 & -12 \\ -24 & -30 & -12 \\ -12 & -12 & -6 \end{bmatrix}$

$2x+2y+z=-1$

$-30 < 0$

$\begin{vmatrix} -30 & -24 \\ -24 & -30 \end{vmatrix} > 0$

$\begin{vmatrix} -30 & -24 & -12 \\ -24 & -30 & -12 \\ -12 & -12 & -6 \end{vmatrix} < 0$

neg. definitna, T_1 je lok. max.

$T_2: \ H_f(1,1,-3) = \begin{bmatrix} 18 & 24 & 12 \\ 24 & 18 & 12 \\ 12 & 12 & 6 \end{bmatrix}$

$2x+2y+z=1$

$18 > 0$

$\begin{vmatrix} 18 & 24 \\ 24 & 18 \end{vmatrix} < 0$

ni definitna, ni ekstrem, T_2 je sedlo.

3. naloga (30 točk)

V elipsoid z enačbo

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

kjer so polosi $a, b, c > 0$, včrtamo kvader, ki ima stranice vzporedne koordinatnim osem.

a) (5 točk) Zapiši dolžine robov takega kvadra z uporabo tistega oglišča (x, y, z) tega kvadra, ki ima vse koordinate pozitivne. Izrazi vsoto vseh dolžin robov kot funkcijo treh spremenljivk $\ell(x, y, z)$.

b) (25 točk) Kolikšna je največja možna vsota dolžin vseh robov tako včrtanega kvadra? (Poišči največjo vrednost $\ell(x, y, z)$ na tem elipsoidu.)

(a) $\ell(x,y,z) = 4(2x+2y+2z) = 8(x+y+z)$

(b) $L(x,y,z,\lambda) = 8(x+y+z) - \lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$

$$L_x = 8 - \lambda\frac{2x}{a^2} = 0 \ \dots\ \lambda = \frac{4a^2}{x}$$

$$L_y = 8 - \lambda\frac{2y}{b^2} = 0 \ \dots\ \lambda = \frac{4b^2}{y}$$

$$L_z = 8 - \lambda\frac{2z}{c^2} = 0 \ \dots\ \lambda = \frac{4c^2}{z}$$

$$\frac{a^2}{x} = \frac{b^2}{y} = \frac{c^2}{z} \ \dots$$

$$\dots\ y = \frac{b^2}{a^2}x,\quad z = \frac{c^2}{a^2}x$$

$$L_\lambda = -\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right) = 0 \ \dots\dots \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2x^2}{a^4}+\frac{c^2x^2}{a^4} = 1 \ \Big/ \cdot a^4$$

$$(a^2+b^2+c^2)\,x^2 = a^4 \ \dots\ x_0 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$y_0 = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$z_0 = \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\ell(x_0,y_0,z_0) = 8(x_0+y_0+z_0) = 8\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

max. vsota dolžin robov.