4. test iz Matematike 2
16. januar 2018

Čas pisanja: **60 minut.** *Nalogi sta enakovredni. Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 za pomoč. Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je* **strogo** *prepovedano.*

1. Izračunaj maso telesa nad xy-ravnino ($z \geq 0$), ki ga iz krogle z neenačbo

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$$

izreže stožec z neenačbo

$$x^2 + y^2 \leq z^2,$$

če je funkcija gostote enaka $\rho(x, y, z) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Namig: Nariši skico. Računaj v sfernih/krogelnih koordinatah.

Rešitev: Del stožca z neenačbo $x^2 + y^2 \leq z^2$ nad xy-ravnino v krogelnih koordinatah pokrijemo tako, da vzamemo $\theta \in [\pi/4, \pi/2]$ in $\phi \in [0, 2\pi]$. Da ostanemo znotraj krogle $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2^2$, mora veljati $r \leq 2$. Funkcija gostote se v krogelnih koordinatah izraža kot $\rho(r, \phi, \theta) = 2 - r$. Upoštevamo še $\det(J\mathbf{F}) = r^2 \cos\theta$ in dobimo integral za maso

$$\begin{aligned} m &= \iiint_D \rho \, dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^2 (2 - r) \, r^2 \cos\theta \, dr \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta \right) \left(\int_0^2 (2r^2 - r^3) dr \right) \\ &= 2\pi \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \frac{4}{3} = \frac{4\pi}{3} (2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

2. Naj bo $\mathbf{F}$ ravninsko vektorsko polje s predpisom

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} x + 3xy \\ y - 3xy \end{bmatrix}.$$

Izračunaj krivuljni integral $\int_{\mathbf{K}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ (pretok polja $\mathbf{F}$ skozi $\mathbf{K}$), če je:

(a) $\mathbf{K}$ daljica od točke $A(1, 0)$ do točke $B(-1, 0)$,

(b) $\mathbf{K}$ lok krožnice z enačbo $x^2 + y^2 = 1$, ki leži nad x-osjo, orientiran od točke $A(1, 0)$ do točke $B(-1, 0)$.

Rešitev: (a) Ena od možnih parametrizacij za daljico od A do B je

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} -t \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{za } t \in [-1, 1].$$

Krivuljni integral $\mathbf{F}$ vzdolž daljice $\mathbf{K}$ je potem

$$\int_{\mathbf{K}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{-1}^{1} \mathbf{F}(\mathbf{p}(t)) \cdot \dot{\mathbf{p}}(t) \, dt = \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} -t \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} dt = \int_{-1}^{1} t \, dt = 0.$$

(b) Krožnico s polmerom 1 in središčem v izhodušču parametriziramo s

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}.$$

Ker želimo opisati le lok od A do B, vzamemo $t \in [0, \pi]$. Dobimo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{K}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{\pi} \mathbf{F}(\mathbf{p}(t)) \cdot \dot{\mathbf{p}}(t)\, dt = \int_0^{\pi} \begin{bmatrix} \cos t + 3\cos t \sin t \\ \sin t - 3\cos t \sin t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} dt \\
&= -3 \int_0^{\pi} (\cos t \sin^2 t + \cos^2 t \sin t) dt \\
&= -3 \left(\int_0^{\pi} \cos t \sin^2 t\, dt + \int_0^{\pi} \cos^2 t \sin t\, dt \right) \\
&= -3 \cdot \left(0 + \frac{2}{3} \right) = -2.
\end{aligned}$$

(Prvega od zadnjih dveh integralov lahko uženemo s substitucijo $u = \sin t$, drugega pa s substitucijo $u = \cos t$.)