# 2. test iz Matematike 2
# 30. november 2017

Čas pisanja: **60 minut.** *Nalogi sta enakovredni. Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 za pomoč. Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je* **strogo** *prepovedano.*

1. Dana je baza $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$, kjer so

$$\mathbf{a} = [1, 0, 0]^\mathsf{T}\,, \quad \mathbf{b} = [1, 1, 0]^\mathsf{T}\,, \ \ \mathbf{c} = [1, 1, 1]^\mathsf{T}.$$

Linearna preslikava $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ slika te vektorje tako:

$$\phi(\mathbf{a}) = \mathbf{a} - \mathbf{b}\,, \ \ \phi(\mathbf{b}) = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}\,, \ \phi(\mathbf{c}) = 2\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

(a) Poišči matriko, ki pripada $\phi$ v bazi $\mathcal{B}$.

(b) Poišči matriko, ki pripada $\phi$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$. Utemelji, da je $\phi$ linearna izometrija.

(c) Poišči tiste lastne vektorje $\phi$, ki pripadajo realnim lastnim vrednostim, in klasificiraj izometrijo $\phi$.

Rešitev: (a) Matrika, ki pripada $\phi$ glede na bazo $\mathcal{B}$ je

$$A_{\phi,\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Ker je $\mathbf{i} = \mathbf{a}$, $\mathbf{j} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ in $\mathbf{k} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$, dobimo $\phi(\mathbf{i}) = -\mathbf{j}$, $\phi(\mathbf{j}) = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}) = \mathbf{a} = \mathbf{i}$ in $\phi(\mathbf{k}) = \phi(\mathbf{c}) - \phi(\mathbf{b}) = -\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{k}$. Matrika, ki pripada $\phi$ glede na standardno bazo je torej

$$A_{\phi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ker je $A_\phi$ ortogonalna in pripada $\phi$ glede na standarno (torej ortonormirano) bazo, je $\phi$ linearna izometrija.
(c) Iz $\det(A_\phi - \lambda I) = (\lambda^2 + 1)(1 - \lambda)$ sledi, da so lastne vrednosti $\phi$ $\lambda_1 = 1$ ter $\lambda_{2,3} = \pm i$. Pri edini realni lastni vrednosti ($\lambda_1 = 1$) dobimo lastni vektor $\mathbf{k}$ (saj je $\phi(\mathbf{k}) = \mathbf{k}$). Izometrija $\phi$ je torej rotacija za kot $\pm\pi/2$ okrog $z$-osi. (Kot lahko dobimo iz $\pm i = e^{\pm\pi i/2}$.)

2. Funkcija $f$ je vsota potenčne vrste $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{k+1}{2^k} x^{2k+1}$.

(a) Določi območje konvergence zgornje vrste. Posebej preveri, kako je s konvergenco v robnih točkah.

(b) Poišči predpis za $f(x)$. (*Namig:* Integriraj po členih in izrazi $\int f(x)\,dx$. Nato odvajaj.)

(c) Izračunaj vsoto številske vrste $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{k+1}{2^{3k+1}}$.

Rešitev: (a) Območje absolutne konvergence da kvocientni kriterij

$$q = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+2)x^2}{2(k+1)} = \frac{x^2}{2}.$$

Iz $q = x^2/2 < 1$ sedaj sledi $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. V robnih točkah $x = \pm\sqrt{2}$ dobimo vrsti

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^k}(-\sqrt{2})^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} -\sqrt{2}(k+1) \text{ in (podobno) } \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{2}(k+1).$$

Obe vrsti divergirata, saj členi nimajo limite $0$. Območje konvergence je torej odprt interval $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(b) Direktno integriramo posamezen člen:

$$\int a_k \, dx = \int \frac{k+1}{2^k} x^{2k+1} \, dx = \frac{k+1}{2^k} \cdot \frac{x^{2k+2}}{2(k+1)} + C_k = \frac{(x^2)^{k+1}}{2^{k+1}} + C_k.$$

Konstante $C_k$ ignorirajmo (saj bomo funkcijo kasneje tako ali tako odvajali) in dobimo

$$\int f(x) \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^{k+1}}{2^{k+1}} = \frac{x^2/2}{1 - x^2/2} = \frac{x^2}{2 - x^2}.$$

Od tod dobimo

$$f(x) = \left(\frac{x^2}{2 - x^2}\right)' = \frac{4x}{(2 - x^2)^2}.$$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^{3k+1}} = f(1/2) = \frac{4 \cdot 1/2}{(2 - (1/2)^2)^2} = \frac{32}{49}$.