Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. kolokvij iz Matematike 1

30. november 2022

Čas pisanja: **90 minut**. *Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 za pomoč. Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, pametnega telefona in ostalih elektronskih naprav je* **strogo** *prepovedano.*

1. naloga (25 točk)

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 5 & -2 & -2 \\ 5 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) (10 točk) Diagonaliziraj matriko A. (*Namig*: 6 je lastna vrednost matrike A.)

$\operatorname{rank}(A) = 2$, saj ima A dva enaka stolpca, torej je 0 lastna vrednost A. Ker je $\operatorname{tr}(A) = 1-2-2 = -3 = \lambda_1 + \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{\lambda_2} + \underset{\substack{\shortparallel \\ 6}}{\lambda_3}$, je $\lambda_1 = -9$.

- $\lambda_1 = -9$ ... $A + 9I = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 5 & 7 & -2 \\ 5 & -2 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

- $\lambda_2 = 0$ ... $A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

- $\lambda_3 = 6$ ... $A - 6I = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 5 \\ 5 & -8 & -2 \\ 5 & -2 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A = QDQ^T$, kjer je

$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & & \\ & 0 & \\ & & 6 \end{bmatrix}$,

$Q = [\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3] = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$.

b) (10 točk) Določi tako matriko A_1 ranga 1, za katero je $\|A_1 - A\|_F$ minimalna.

Po Eckart-Youngovem izreku je:

$$A_1 \overset{\uparrow}{=} \lambda_1 \vec{q}_1 \vec{q}_1^{\,T} = -9 \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}[-1, 1, 1] = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

saj je $\lambda_1 = -9$ po abs. vrednosti največja lastna vrednost.

c) (5 točk) Določi še tako matriko A_2 ranga 2, za katero bo $\|A_2 - A\|_F$ minimalna.

Ker je A ranga 2, je $A_2 = A$.

2. naloga (25 točk)

Ali je katera od matrik

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 5 & -2 & -2 \\ 5 & -2 & -2 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

pozitivno definitna? Za vsako pozitivno definitno matriko poišči pripadajoč razcep Choleskega.

Uporabimo Sylvestrov kriterij za A in B:

- za A: $1 > 0$,

  $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -12 < 0$,

  A ni poz definitna

- za B: $7 > 0$,

  $\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 34 > 0$,

  $$\begin{vmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

  $$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} > 0,$$ tj. B je poz. definitna.

Poiščimo razcep Choleskega za B:

$$L_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{7} & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{7} & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{7} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \;\; - \frac{1}{\;} \;\; = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 34 & 20 \\ 20 & 34 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{34}{7}} & 0 \\ \frac{20}{\sqrt{238}} & 1 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \frac{34}{7} - \frac{\cancel{7}}{\cancel{34}\,17} \cdot \frac{\cancel{400}\,200}{\cancel{49}\,7} = \frac{378}{119}$$

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt{7} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{7}} & \sqrt{\frac{34}{7}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{20}{\sqrt{238}} & \frac{3\sqrt{42}}{\sqrt{119}} \end{bmatrix}$$

3. naloga (25 točk)

Naj bo A matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

V vektorskem prostoru $\mathbb{R}^{3\times 2}$ opazujemo podmnožici

$$V := \{X \in \mathbb{R}^{3\times 2} : AX = A^\top X\} \text{ ter } W := \{X \in \mathbb{R}^{3\times 2} : \|AX\|_F = \|A^\top X\|_F\}.$$

Katere od teh podmnožic so vektorski podprostori v $\mathbb{R}^{3\times 2}$? Zakaj oz. zakaj ne? Za vsak vektorski podprostor poišči bazo in določi dimenzijo!

V je vektorski podprostor, namreč:

Za $X, Y \in V$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tj. $AX = A^T X$ in $AY = A^T Y$, velja:

$$A(\alpha X + \beta Y) = \alpha AX + \beta AY = \alpha A^T X + \beta A^T Y = A^T(\alpha X + \beta Y),$$

torej $\alpha X + \beta Y \in V$.

Poiščimo bazo za V: Pišimo $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$, tedaj:

$$AX = \begin{bmatrix} a+c, & b+d \\ c+e, & d+f \\ e & f \end{bmatrix} = A^T X = \begin{bmatrix} a & b \\ a+c, & b+d \\ c+e, & d+f \end{bmatrix}, \text{ torej } \begin{matrix} \cancel{a}+c = \cancel{a}, & \cancel{b}+d = \cancel{b} \\ \cancel{c}+e = a+\cancel{c}, & \cancel{d}+f = b+\cancel{d} \\ \cancel{e} = c+\cancel{e}, & \cancel{f} = d+\cancel{f} \end{matrix}$$

$$\text{in } \begin{matrix} c = 0, & d = 0 \\ e = a, & f = b \\ 0 = c, & 0 = d \end{matrix} \quad \dots \quad X = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Končno $B_V = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$, $\dim(V) = 2$.

Množica W <u>ni</u> vektorski podprostor. Matriki

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ter } X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ sta namreč v } W,$$

vendar $X_1 + X_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \notin W$.

4. naloga (25 točk)

V vektorskem prostoru polinomov $\mathbb{R}_4[x]$ definiramo vektorski podprostor *sodih* polinomov

$$\mathcal{U} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] \, : \, p(-x) = p(x)\}.$$

Ni potrebno dokazovati, da je $\mathcal{U}$ res vektorski podprostor v $\mathbb{R}_4[x]$. Definirajmo preslikavo

$$\phi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}_4[x] \quad \text{s predpisom} \quad \phi(p)(x) = x\,p''(x) - 2p'(x).$$

a) (3 točke) Zapiši bazo $\mathcal{B}$ vektorskega prostora $\mathcal{U}$. (Ni treba utemeljevati, da je res baza.) Koliko je $\dim(\mathcal{U})$?

$\mathcal{B} = \{1, x^2, x^4\}$ (saj je vsak $p \in \mathcal{U}$ oblike $p(x) = ax^4 + cx^2 + e$)

$\dim \mathcal{U} = |\mathcal{B}| = 3.$

b) (5 točk) Pokaži, da je ϕ linearna preslikava.

Vzemimo $p, q \in \mathcal{U}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tedaj:

$\phi(\alpha p + \beta q)(x) = x\,(\alpha p + \beta q)''(x) - 2\,(\alpha p + \beta q)'(x) =$

$= x\alpha p''(x) + x\beta q''(x) - 2\alpha p'(x) - 2\beta q'(x) =$

$= \alpha\,(x p''(x) - 2p'(x)) + \beta\,(x q''(x) - 2q'(x)) = \alpha\,\phi(p)(x) + \beta\,\phi(q)(x).$

tj. ϕ je linearna!

c) (9 točk) Zapiši matriko A_ϕ, ki pripada preslikavi ϕ glede na bazo $\mathcal{B}$ ter standardno bazo $\mathcal{S} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ prostora $\mathbb{R}_4[x]$.

$\phi(1)(x) = 0 - 2 \cdot 0 = 0$

$\phi(x^2)(x) = x \cdot 2 - 2 \cdot 2x = -2x$

$\phi(x^4)(x) = x \cdot 12x^2 - 2 \cdot 4x^3 = 4x^3$

$$A_\phi = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} 1 & x^2 & x^4 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{array} \end{array}$$

d) (8 točk) Določi bazi jedra ter slike preslikave ϕ.

Iz (c) sledi, da so v $\ker\phi$ le konst. polinomi, torej $\mathcal{B}_{\ker\phi} = \{1\}$.

Iz (c) prav tako sledi, da so v $\operatorname{im}\phi$ linearne kombinacije $\phi(x^2)$ in $\phi(x^4)$, torej $\mathcal{B}_{\operatorname{im}\phi} = \{x, x^3\}$.