Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. kolokvij iz Matematike 1

25. november 2021

Čas pisanja: **90 minut**. *Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 za pomoč. Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, pametnega telefona in ostalih elektronskih naprav je* **strogo** *prepovedano.*

1. naloga (25 točk)

Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) (10 točk) Poišči vse rešitve matrične enačbe za $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$AX + XB = X$$

Rešitev: Matriko sistema za koeficiente matrike X lahko dobimo na več načinov. En način je, da enačbo prepišemo v obliko

$$(A - I)X + XB = 0$$

in se spomnimo, da je vektorizirana oblika te enačbe enaka

$$(B^T \oplus (A - I))\mathrm{vec}(X) = 0$$

Izračunamo matriko tega (homogenega) sistema

$$M = B^T \oplus (A - I) = B^T \otimes I + I \otimes (A - I) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gaussova eliminacija na matriki M da

$$M \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tako dobimo tri neodvisne enačbe za štiri koeficiente matrike $X = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

$$a - c = 0, \ b = 0, \ d = 0$$

Če za prosto spremenljivko izberemo $c = t \in \mathbb{R}$, lahko vsako rešitev izrazimo kot

$$X = t\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) (15 točk) Za katere vrednosti $\lambda \in \mathbb{R}$ ima matrična enačba

$$AX + XB = \lambda X$$

kakšno neničelno rešitev?
Namig: Izrazi to matrično enačbo kot enačbo z neznanko $\mathrm{vec}(X)$ namesto X.
Rešitev: Vektorizirana enačba ima obliko

$$(B^T \oplus A)\mathrm{vec}(X) = \lambda \mathrm{vec}(X)$$

kar prepoznamo kot enačbo za lastni vektor matrike $B^T \oplus A$. Matrika A ima očitno dvojno lastno vrednost $\lambda_{1,2} = 1$, za matriko B^T pa po kratkem izračunu dobimo lastni vrednosti $\mu_1 = 0, \mu_2 = 2$. Za matriko $B^T \oplus A$ vemo, da se lastne vrednosti dobijo kot vse možne vsote lastnih vrednosti $\lambda_i + \mu_j$. Tako za $B^T \oplus A$ dobimo dve dvojni lastni vrednosti 1 in 3, kar sta torej edini vrednosti za λ, za kateri ima enačba neničelno rešitev.

2. naloga (30 točk)

Dane so matrike

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A = KK^\mathsf{T} \quad \text{ter} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

a) (5 točk) Utemelji, da je za poljubni simetrični pozitivno semidefinitni matriki A in B, tudi matrika $A \otimes B$ simetrična pozitivno semidefinitna.

Rešitev: Simetričnost A in B pomeni $A^\mathsf{T} = A$ in $B^\mathsf{T} = B$. Potem velja

$$(A \otimes B)^\mathsf{T} = A^\mathsf{T} \otimes B^\mathsf{T} = A \otimes B,$$

torej je $A \otimes B$ simetrična.

Ker sta A in B pozitivno semidefinitni, za lastne vrednosti λ_i in μ_j matrik A in B velja $\lambda_i \geq 0$ ter $\mu_j \geq 0$. Lastne vrednosti $A \otimes B$ pa so produkti $\lambda_i \mu_j \geq 0$, torej je $A \otimes B$ pozitivno semidefinitna.

b) (5 točk) Utemelji, da je za poljubni spodnje trikotni matriki K in L, tudi matrika $K \otimes L$ spodnje trikotna.

Rešitev: Jasno je, da je $K \otimes L$ bločno spodnje trikotna. Ker so njeni diagonalni bloki $k_{ii}L$ spodnje trikotni (saj je L spodnje trikotna), je $K \otimes L$ celo spodnje trikotna.

c) (5 točk) Utemelji, da sta matriki A in B pozitivno definitni.

Rešitev: Ker je $A = KK^\mathsf{T}$, je A pozitivno definitna (saj ima razcep Cholesky-ega). Pozitivna definitnost B bo sledila iz razcepa Cholesky-ega za B, ki ga bomo poiskali spodaj.

d) (15 točk) Poišči razcepa Cholesky-ega matrik A in B ter z uporabo le-teh izrazi razcep Cholesky-ega matrike $A \otimes B$.

Rešitev: Matrika $A = KK^\mathsf{T}$ je že dana z razcepom Cholesky-ega. Poiščimo še razcep Cholesky-ega ($B = LL^\mathsf{T}$) matrike B z uporabo postopka, ki smo ga opisali na vajah:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

To ponovimo za

$$B_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} - \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

in dobimo

$$L_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Še $B_3 = 5 - \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 2 = 4$ in $L_3 = 2$. Končno

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ker velja

$$A \otimes B = (KK^\mathsf{T}) \otimes (LL^\mathsf{T}) = (K \otimes L)(K^\mathsf{T} \otimes L^\mathsf{T}) = (K \otimes L)(K \otimes L)^\mathsf{T}$$

in je po (b) $K \otimes L$ spodnje trikotna matrika, smo poiskali razcep Cholesky-ega matrike $A \otimes B$.

3. naloga (25 točk)

Naj bo $\mathbf{a} = [1,1,1]^\mathsf{T}$. Definirajmo spodnji podmnožici vektorskega prostora $\mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$V := \{X \in \mathbb{R}^{3\times 3} : X^\mathsf{T}\mathbf{a} = 2X\mathbf{a}\} \text{ ter } W := \{X \in \mathbb{R}^{3\times 3} : \mathbf{a} = 2X^\mathsf{T}X\mathbf{a}\}.$$

a) (15 točk) Točno ena od podmnožic je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{3\times 3}$. Poišči jo! Utemelji zakaj je podprostor (in zakaj druga ni podprostor).

Rešitev: Podmnožica W ni vektorski podprostor, saj ne vsebuje ničelne matrike $0 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$\mathbf{a} \neq 2\,0^\mathsf{T}0\mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Podmnožica V je vektorski podprostor; utemeljimo: Naj bosta $X, Y \in V$, tj. naj velja $X^\mathsf{T}\mathbf{a} = 2X\mathbf{a}$ ter $Y^\mathsf{T}\mathbf{a} = 2Y\mathbf{a}$, in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tedaj

$$(\alpha X + \beta Y)^\mathsf{T}\mathbf{a} = \alpha X^\mathsf{T}\mathbf{a} + \beta Y^\mathsf{T}\mathbf{a} = \alpha\, 2X\mathbf{a} + \beta\, 2Y\mathbf{a} = 2(\alpha X + \beta Y)\mathbf{a},$$

tj. $\alpha X + \beta Y \in V$ in V je res vektorski podprostor.

b) (10 točk) Za tisto od podmnožic, ki je vektorski podprostor, poišči bazo in določi dimenzijo.

Rešitev: Pišimo

$$X = \begin{bmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{bmatrix}.$$

Iz $X^\mathsf{T}\mathbf{a} = 2X\mathbf{a}$ dobimo

$$\begin{bmatrix} r & u & x \\ s & v & y \\ t & w & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{oziroma} \quad \begin{bmatrix} r+u+x \\ s+v+y \\ t+w+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(r+s+t) \\ 2(u+v+w) \\ 2(x+y+z) \end{bmatrix}.$$

Vzemimo izvendiagonalne elemente X za proste spremenljivke. Tedaj se diagonalni elementi X izrazijo kot

$$\begin{aligned} r &= u + x - 2s - 2t, \\ v &= s + y - 2u - 2w, \\ z &= t + w - 2x - 2y. \end{aligned}$$

Vsaka matrika $X \in V$ je torej oblike

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} u + x - 2s - 2t & s & t \\ u & s + y - 2u - 2w & w \\ x & y & t + w - 2x - 2y \end{bmatrix} \\ &= s\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + x\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Teh 6 matrik tvori bazo za V in $\dim(V) = 6$.

4. naloga (20 točk)

Definirajmo preslikavi

$$\begin{array}{rcccc} \phi & : & \mathbb{R}_2[x] & \to & \mathbb{R}_3[x] \\ \psi & : & \mathbb{R}_3[x] & \to & \mathbb{R}_2[x] \end{array}$$

s predpisoma

$$\begin{aligned} \phi(p)(x) &= x\,p(x) \\ \psi(p)(x) &= p'(x+1). \end{aligned}$$

a) (10 točk) Utemelji, da sta $\phi \circ \psi$ in $\psi \circ \phi$ linearni preslikavi.
Rešitev: Za poljubna polinoma $p, q \in \mathbb{R}_2[x]$ ter skalarja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ lahko zapišemo

$$\begin{aligned} \phi(\alpha p + \beta q)(x) &= x(\alpha p + \beta q)(x) \\ &= \alpha x p(x) + \beta x q(x) \\ &= \alpha \phi(p)(x) + \beta \phi(q)(x) \end{aligned}$$

Podobno za poljubna $p, q \in \mathbb{R}_3[x]$ dobimo

$$\begin{aligned} \psi(\alpha p + \beta q)(x) &= (\alpha p + \beta q)'(x+1) \\ &= \alpha p'(x+1) + \beta q'(x+1) \\ &= \alpha \psi(p)(x) + \beta \psi(q)(x) \end{aligned}$$

Ker sta ϕ in ψ linearni preslikavi, sta tudi kompozituma $\phi \circ \psi$ in $\phi \circ \psi$ linearna.

b) (10 točk) Zapiši matriko, ki predstavlja $\psi \circ \phi$ v standardni bazi $\mathbb{R}_2[x]$.
Rešitev: Izračunati je potrebno slike $(\psi \circ \phi)(p_n)$ standardnih baznih vektorjev $p_n(x) = x^n$ (za $n = 0, 1, 2$).

$$\begin{aligned} (\psi \circ \phi)(p_0) &= \psi(\phi(1)) = \psi(x) = (x+1)' = 1 = p_0 \\ (\psi \circ \phi)(p_1) &= \psi(\phi(x)) = \psi(x^2) = ((x+1)^2)' = 2(x+1) = 2p_0 + 2p_1 \\ (\psi \circ \phi)(p_2) &= \psi(\phi(x^2)) = \psi(x^3) = ((x+1)^3)' = 3(x+1)^2 = 3p_0 + 6p_1 + 3p_2 \end{aligned}$$

Od tod lahko preberemo koeficiente matrike, s katero predstavimo $\psi \circ \phi$ v standardni bazi.

$$A_{\psi \circ \phi} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$