1. kolokvij iz Matematike 1 (1. december 2020)

1. [**50 točk**] Naj bo / Let

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \text{ in / and } B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -4 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

(a) Točno ena izmed matrik A in B je pozitivna semidefinitna. Katera? Utemelji odgovor.

(b) Za tisto matriko, ki je pozitivna semidefinitna, izračunaj razcep Choleskega, tj. poišči spodnje-trikotno matriko L, za katero velja $A = LL^T$.

(a) Exactly one of these two matrices is positive semi-definite. Which one? Justify your answer.

(b) For the matrix that is positive semi-definite, find the Cholesky decomposition, ie. find a lower triangular matrix L, for which $A = LL^T$.

Rešitev: (a) Pozitivno semidefinitnost lahko testiramo s Sylvestrovim kriterijem. Ker je determinanta glavne 2×2 podmatrike B negativna,

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -10,$$

B *ni* pozitivno semidefinitna. Ker so vse determinante glavnih podmatrik A pozitivne,

$$4 > 0\,, \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \text{ in } \begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

je A pozitivno definitna po Sylvestrovem kriteriju.

(b) Poiščimo razcep Choleskega matrike A. Pišimo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{b}^\mathsf{T} \\ \mathbf{b} & A' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

in

$$L_1 := \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\mathbf{b} & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tedaj je

$$A' - \frac{1}{a_{11}}\mathbf{b}\mathbf{b}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Zato je

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ter

$$A'' = 5 - \frac{1}{1} \cdot 2 \cdot 2 = 1,$$

torej $L_3 = \sqrt{1} = 1$. Končno

$$L = L_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\mathsf{T} & L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Za ta L velja $LL^\mathsf{T} = A$.

1.' [**50 točk**] Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Poišči diagonalno matriko D in ortogonalno matriko U, da bo $A = UDU^{\mathsf{T}}$.

(b) Poišči matriko ranga 1, ki je v Frobeniusovi normi najbližja Kroneckerjevemu produktu $A \otimes A$.

Ni ne potrebno, niti zaželeno, da izračunate matriko $A \otimes A$.

Let

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine a diagonal matrix D and an orthogonal matrix U such that $A = UDU^{\mathsf{T}}$.

(b) Find a matrix of rank 1 which is the best approximation to the Kronecker product $A \otimes A$ w.r.t. the Frobenius norm.

Evaluation of $A \otimes A$ is not necessary, nor required.

Rešitev: (a) Poiščimo najprej lastne vrednosti matrike A:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda + 2)(\lambda - 3).$$

Lastni vrednosti A sta torej (ničli tega karakterističnega polinoma) $\lambda_1 = -2$ ter $\lambda_2 = 3$.

Lastni vektor $\mathbf{u}$, ki pripada $\lambda_1 = -2$, je neničelna rešitev sistema $(A + 2I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$:

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

torej $\mathbf{u}_1' = [-1, 2]^{\mathsf{T}}$. Ker iščemo ortogonalno prehodno matriko U, ga še normiramo

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{u}_1'}{\|\mathbf{u}_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ker je A simetrična 2×2 matrika, mora biti lastni vektor k $\lambda_2 = 3$ pravokoten na $\mathbf{u}_1$. Izberimo kar

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Končno

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ in } U = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Aproksimacijo ranga 1 za $A \otimes A$ bomo poiskali s pomočjo Eckart–Youngovega izreka. Lastne vrednosti $A \otimes A$ so vsi možni produkti lastnih vrednosti A, tj.

$$\mu_1 = \lambda_1 \cdot \lambda_1 = 4,\ \mu_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -6,\ \mu_3 = \lambda_2 \cdot \lambda_1 = -6,\ \mu_4 = \lambda_2 \cdot \lambda_2 = 9.$$

Po absolutni vrednosti je največja $\mu_4 = 9$. Normiran lastni vektor, ki pripada $\mu_4 = 9$ je

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Najboljša aproksimacija ranga 1 za $A \otimes A$ je torej matrika

$$A_1' = \mu_4 \mathbf{v}_4 \mathbf{v}_4^\mathsf{T} = \frac{9}{25}\begin{bmatrix} 16 & 8 & 8 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 2 \\ 8 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b′) Še en način: Aproksimacija ranga 1 za originalno matriko A je po Eckart–Youngovem izreku

$$A_1 = \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^\mathsf{T} = \frac{3}{5}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

zato je aproksimacija ranga 1 za $A \otimes A$ spet enaka

$$A_1 \otimes A_1 = \frac{9}{25}\begin{bmatrix} 16 & 8 & 8 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 2 \\ 8 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Zakaj ta pristop/način ne 'deluje' za aproksimacije ranga 2 ali več?)

1.″ [**50 točk**] Naj bo / Let

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ in / and } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Določi lastne vrednosti matrik A in B. Za vsako lastno vrednost poišči bazo za ustrezni lastni podprostor. Ali je matriko B mogoče diagonalizirati?

(b) Določi lastne vrednosti Kroneckerjeve vsote $A \oplus B$.

(c) Poišči lastni vektor $A \oplus B$ za največjo lastno vrednost. Pri tem izberite celoštevilski lastni vektor, ki ima najmanjšo možno pozitivno zadnjo koordinato. Ali je mogoče $A \oplus B$ diagonalizirati?

Pri nalogah (a) in (b) ni niti potrebno niti zaželeno, da izračunate matriko $A \oplus B$.

(a) Find the eigenvalues of A and B. For each eigenvalue find the corresponding eigenspace. Is B diagonalizable?

(b) Find the eigenvalues of the Kronecker sum $A \oplus B$.

(c) Find the eigenvector for $A \oplus B$ with positive integer coordinates which has the smallest possible last coordinate. Is $A \oplus B$ diagonalizable?

It is neither neccessary nor desirable to compute $A \oplus B$ to solve tasks (a) and (b).

Rešitev: (a) Lastne vrednosti A ničle njenega karakterističnega polinoma:

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 - 1 = (\lambda+2)\lambda.$$

Lastni vrednosti A sta torej $\lambda_1 = -2$ ter $\lambda_2 = 0$. Pripradajoča lastna vektorja sta (po kratki Gaussovi eliminaciji) $\mathbf{v}_1 = [-1, 1]^\mathsf{T}$ ter $\mathbf{v}_2 = [1, 1]^\mathsf{T}$. Vsak zase ta lastna vektorja tvorita bazi za pripadajoča lastna podprostora.

Ker je B zgornje trikotna, so njene lastne vrednosti na diagonali: $\mu_{1,2} = 1$, $\mu_3 = 2$. Čeprav je jasno, da je $\mathbf{u}_1 = [1,0,0]^\mathsf{T}$ lastni vektor, ki pripada $\mu_{1,2} = 1$, rešimo sistem $(B - \mu_{1,2}I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$:

$$B - I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

kar pomeni $\mathbf{u} = [x_1, 0, 0]^\mathsf{T} = x_1\mathbf{u}_1$, tj. $\mathbf{u}_1$ že razpenja lastni podprostor za $\mu_{1,2} = 1$. To hkrati pomeni, da B ne moremo diagonalizirati, saj ima pri lastni vrednosti z večkratnostjo 2 lastni podprostor dimenzije 1. Še lastni vektor k lastni vrednosti $\mu_3 = 2$ poiščimo:

$$B - \mu_3 I = B - 2I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Torej $\mathbf{u}_3 = [-5x_3, -2x_3, x_3]^\mathsf{T}$. Izberemo $x_3 = -1$ in dobimo $\mathbf{u}_3 = [5, 2, -1]^\mathsf{T}$, ta vektor razpenja lastni podprostor za lastno vrednost $\mu_3 = 2$.

(b) Lastne vrednosti $A \oplus B$ so vsote lastnih vrednosti za A in B. Torej:

$$\lambda_1 + \mu_1 = -1,\ \lambda_1 + \mu_2 = -1,\ \lambda_1 + \mu_3 = 0,\ \lambda_2 + \mu_1 = 1,\ \lambda_2 + \mu_2 = 1,\ \lambda_2 + \mu_3 = 2.$$

(c) Lastni vektor za $\lambda_2 + \mu_3 = 2$ je pripadajoč Kroneckerjev produkt

$$\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Da zadostimo zahtevi o celoštevilskih komponentah in najmanjši pozitivni zadnji komponenti, moramo le zamenjati predznak; zahtevani lastni vektor je torej $-\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{u}_3$.

Ostale (linearno neodvisne) lastne vektorje za $A \otimes B$ dobimo kot Kroneckerjeve produkte pripadajočih (linearno neodvisnih) lastnih vektorjev za A in B. Ker so taki le 4, se matrike $A \otimes B \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ ne da diagonalizirati.

2. [**50 točk**] Naj bo $\mathbf{x} = [1,0,1]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$. V $\mathbb{R}^{3\times 3}$ sta dani podmnožici

$$U = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} : A\mathbf{x} = A^\mathsf{T}\mathbf{x}\} \ \text{ ter } \ V = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} : \|A\mathbf{x}\| = \|A^\mathsf{T}\mathbf{x}\|\}.$$

   (a) Ali sta U in V vektorska podprostora v $\mathbb{R}^{3\times 3}$? Odgovor natančno utemelji!
   (b) Za vsako od podmnožic U in V, ki je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{3\times 3}$, poišči bazo in določi dimenzijo.
   (c) Zapiši matriko

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   kot linearno kombinacijo baznih matrik iz (b) dela naloge.

Let $\mathbf{x} = [1,0,1]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$. In $\mathbb{R}^{3\times 3}$ you are given subsets

$$U = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} : A\mathbf{x} = A^\mathsf{T}\mathbf{x}\} \ \text{ and } \ V = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} : \|A\mathbf{x}\| = \|A^\mathsf{T}\mathbf{x}\|\}.$$

(a) Are U and V vector subspaces of $\mathbb{R}^{3\times 3}$? Justify your answer!

(b) For those of the subsets U and V which are vector subspaces of $\mathbb{R}^{3\times 3}$ find their bases and determine their dimensions.

(c) Express the matrix

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

as a linear combination of basis matrices from part (b) of this task.

Rešitev: (a) Vzemimo $A, B \in U$, tj. $A\mathbf{x} = A^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$ ter $B\mathbf{x} = B^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$. Tedaj

$$(\alpha A + \beta B)\mathbf{x} = \alpha A\mathbf{x} + \beta B\mathbf{x} = \alpha A^{\mathsf{T}}\mathbf{x} + \beta B^{\mathsf{T}}\mathbf{x} = (\alpha A + \beta B)^{\mathsf{T}}\mathbf{x},$$

tj. $\alpha A + \beta B \in U$ in U je vektorski podprostor.

Množica V *ni* vektorski podprostor. Matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sta namreč vsebovani v V (A je tako ali tako simetrična, za B direktno preverimo $\|B\mathbf{x}\| = \|B^{\mathsf{T}}\mathbf{x}\|$), vendar $\|(A+B)\mathbf{x}\| \neq \|(A+B)^{\mathsf{T}}\mathbf{x}\|$, tj. $A + B \notin V$.

(b) Poiščimo bazo za U. Pišimo

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Iz $A\mathbf{x} = A^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$ dobimo

$$\begin{bmatrix} a+c \\ d+f \\ g+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+g \\ b+h \\ c+i \end{bmatrix}.$$

Iz 1. in 3. vrstice dobimo $g = c$, iz 2. vrstice pa $h = d + f - b$, splošna matrika iz U je torej oblike

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ c & d+f-b & i \end{bmatrix} =$$

$$= a\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + e\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + f\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Baza za U je torej

$$B_U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

in $\dim(U) = 7$.

(c) X je kar vsota vseh baznih matrik (za zgoraj izbrano bazo).

2.' [**50 točk**] Naj bo / Let

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

in definirajmo linearne preslikave/and define linear transformations $\rho\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 3}$, $\sigma\colon \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ in/and $\tau\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ s predpisi/given by

$$\rho(X) = X \cdot A,\ \sigma(X) = A^{\top} \cdot X \ \text{ter/and } \ \tau(X) = \mathrm{tr}(\sigma(\rho(X))).$$

Linearnosti preslikav ni potrebno dokazovati. / You do not have to prove the linearity of these transformations.

(a) Zapišite matriko, ki pripada preslikavi ρ v standardni bazi.

(b) Zapišite matriko, ki pripada preslikavi τ v standardni bazi.

(c) Določite bazo jedra preslikave ρ.

(a) Write the matrix corresponding to linear transformation ρ in the standard bases.

(b) Write the matrix corresponding to linear transformation τ in the standard bases.

(c) Find a basis of the kernel of ρ.

Rešitev: (a) Standardna baza $\mathbb{R}^{2\times 2}$ je $B_{\mathbb{R}^{2\times 2}} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$, standardna baza za $\mathbb{R}^{2\times 3}$ pa $B_{\mathbb{R}^{2\times 3}} = \{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}\}$. Slike standardnih baznih matrik s preslikavo ρ so

$$\rho(E_{11}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\rho(E_{12}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\rho(E_{21}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$
$$\rho(E_{22}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix},$$

torej je matrika, ki pripada ρ, enaka

$$A_\rho = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

(b) Zapišimo τ eksplicitno:

$$\tau(X) = \mathrm{tr}(\sigma(XA)) = \mathrm{tr}(A^{\top} X A) = \mathrm{tr}(AA^{\top} \cdot X),$$

kjer smo za zadnji enačaj uporabili multiplikativnost sledi. Ker je

$$AA^{\top} = \begin{bmatrix} 6 & 18 \\ 18 & 54 \end{bmatrix},$$

hitro dobimo

$$\tau(E_{11}) = 6,\ \tau(E_{12}) = 18,\ \tau(E_{21}) = 18,\ \tau(E_{22}) = 54.$$

Matrika, ki pripada τ je torej

$$A_\tau = \begin{bmatrix} 6 & 18 & 18 & 54 \end{bmatrix}.$$

(c) Poiščimo najprej $N(A_\rho)$:

$$A_\rho \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

v $N(A_\rho)$ so torej stolpci oblike $\mathbf{x} = [-3x_2, x_2, -3x_4, x_4]^\mathsf{T}$, kjer sta $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$. Glede na standardno bazo $\mathbb{R}^{2\times 2}$ temu stolpcu pripadajo matrike oblike

$$X = \begin{bmatrix} -3x_2 & x_2 \\ -3x_4 & x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Baza za $\ker \tau$ je torej $B_{\ker \tau} = \left\{ \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

2.” [**50 točk**] Dani sta linearni preslikavi / Consider linear transformations

$$\tau\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2} \ \text{in/and} \ \sigma\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}_2[x]$$

s predpisoma/given by

$$\tau(p) = \begin{bmatrix} p'(1) & p(0) \\ p(0) & p'(1) \end{bmatrix} \ \text{ter} \ \sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = bx^2 + cx + a + d.$$

Linearnosti preslikav ni potrebno dokazovati. / You do not have to prove the linearity of these transformations.

(a) Zapišite matriko, ki pripada preslikavi τ v standardnih bazah.

(b) Zapišite matriko, ki pripada preslikavi $\sigma \circ \tau$ v standardni bazi.

(c) Določite bazo jedra preslikave $\sigma \circ \tau$.

(a) Write the matrix corresponding to linear transformation τ in the standard bases.

(b) Write the matrix corresponding to linear transformation $\sigma \circ \tau$ in the standard bases.

(c) Find a basis of the kernel of $\sigma \circ \tau$.

Rešitev: (a) Bazne polinome $\mathbb{R}_2[x]$, $B_{\mathbb{R}_2[x]} = \{1, x, x^2\}$, preslikava τ slika v:

$$\tau(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \tau(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \tau(x^2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matrika, ki pripada τ je torej

$$A_\tau = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Spet poiščimo slike baznih polinomov:

$$\sigma(\tau(1)) = \sigma\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = x^2 + x, \ \sigma(\tau(x)) = \sigma\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2, \ \sigma(\tau(x^2)) = \sigma\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = 4.$$

Matrika, ki pripada $\sigma \circ \tau$ je torej

$$A_{\sigma\circ\tau} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Iz

$$A_{\sigma\circ\tau} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sledi, da so $N(A_{\sigma\circ\tau})$ stolpci oblike $\mathbf{x} = [0, -2x_3, x_3]^\mathsf{T}$ za $x_3 \in \mathbb{R}$. Glede na bazo $B_{\mathbb{R}_2[x]} = \{1, x, x^2\}$ jim pripadajo polinomi oblike $x_3(x^2 - 2x)$. Baza za $\ker(\sigma \circ \tau)$ je torej $B_{\ker(\sigma\circ\tau)} = \{x^2 - 2x\}$.