Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

3. Računski izpit iz Matematike 1

30. avgust 2023

Čas pisanja: **90 minut**. *Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 za pomoč. Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, pametnega telefona in ostalih elektronskih naprav je* **strogo** *prepovedano.*

1. naloga (25 točk)

O *simetrični* matriki $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ vemo naslednje: ima lastno vrednost $\lambda_1 = 3$ z lastnim vektorjem $\mathbf{v}_1 = [1,2,2]^\mathsf{T}$, lastno vrednost $\lambda_2 = -3$ z lastnim vektorjem $\mathbf{v}_2 = [2,-2,1]^\mathsf{T}$, ter lastno vrednost $\lambda_3 = 9$.

a) (15 točk) Določi matriko A.
Rešitev : Ker je A simetrična matrika, vemo, da mora biti lastni vektor $\mathbf{v}_3$ za lastno vrednost λ_3 ortogonalen na $\mathbf{v}_1$ in $\mathbf{v}_2$. Dobimo ga lahko torej z vektorskim produktom (lahko tudi na druge načine)

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Ortonormiran sistem lastnih vektorjev je tako

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Matriko A lahko zdaj direktno izračunamo kot

$$A = \lambda_1 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_1^\mathsf{T} + \lambda_2 \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_2^\mathsf{T} + \lambda_3 \mathbf{q}_3 \mathbf{q}_3^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

b) (10 točk) Koliko je $\|A\|_F$? Določi še matriko A_1 ranga 1, da bo $\|A - A_1\|_F$ minimalna.
Rešitev : Kvadrat Frobeniusove norma $\|A\|_F^2$ je enak vsoti kvadratov singularnih vrednosti, ki so v primeru simetričnih matrik (do predznaka) enake lastnim vrednostim. Torej

$$\|A\|_F = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} = 3\sqrt{11}$$

kar lahko seveda izračunamo tudi, če nismo eksplicitno izračunali A. Za A_1 vzamemo največji člen v singularnem razcepu

$$A_1 = \lambda_1 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_1^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

2. naloga (25 točk)

Na vektorskem prostoru polinomov $\mathbb{R}_2[x]$ definiramo preslikavo $\phi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ s predpisom

$$\phi(p)(x) = xp(x+1) + x^2 p'(x)$$

a) (5 točk) Preveri, da je ϕ linearna preslikava.
Rešitev : Po definiciji preverimo

$$\begin{aligned}
\phi(\alpha p + \beta q)(x) &= x(\alpha p + \beta q)(x+1) + x^2((\alpha p + \beta q)'(x) \\
&= x\alpha p(x+1) + x\beta q(x+1) + x^2(\alpha p'(x) + \beta q'(x)) \\
&= \alpha(xp(x+1) + x^2 p'(x)) + \beta(xq(x+1) + x^2 q'(x)) \\
&= \alpha\phi(p)(x) + \beta\phi(q)(x)
\end{aligned}$$

b) (10 točk) Zapiši matriko A_ϕ, ki predstavlja preslikavo ϕ v standardnih bazah $\mathbb{R}_2[x]$ in $\mathbb{R}_3[x]$

c) (10 točk) Določi bazi za jedro $\ker(\phi)$ ter sliko $\mathrm{im}(\phi)$.

3. naloga (25 točk)

Prisekan valj opišemo kot presek območij z neenačbami

$$x^2 + y^2 \leq 1,\ x + y + z \leq 2,\ z \geq 0$$

a) (15 točk) Izračunaj prostornino danega prisekanega valja.
Namig : Uporabi cilindrične koordniate.

b) (10 točk) Izračunaj še koordinate masnega središča. Dovolj je izračunati x^* in z^* koordinato, ker velja $x^* = y^*$.

4. naloga (25 točk)

Za posebno omejeno izdajo želijo pri nekem proizvajalcu pijač izdelati pločevinko v obliki polovice valja. Kolikšno naj bo razmerje med premerom in višino tega valja, da bodo za pločevinko take oblike pri dani količini pločevine P_0 dobili največjo prostornino?