

Ime in priimek _____

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

2. Računski izpit iz Matematike 1

30. januar 2023

Čas pisanja: **90 minut**. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 za pomoč. Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, pametnega telefona in ostalih elektronskih naprav je **strogo prepovedano**.

1. naloga (25 točk)

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

a) (10 točk) Diagonaliziraj matriko A .

b) (10 točk) Poišči matriko M ranga 1, ki v Frobeniusovi normi najboljše aproksimira matriko A .

c) (5 točk) Katera matrika M ranga 2 v Frobeniusovi normi najboljše aproksimira A ?

2. naloga (25 točk)

Naj bo

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Definirajmo preslikavo $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ s pravilom

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{ax}^T - \mathbf{xa}^T$$

a) (5 točk) Utemelji, da je ϕ linearna preslikava.

b) (10 točk) Predstavi preslikavo ϕ z matriko v standardnih bazah prostorov \mathbb{R}^2 in $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

c) (10 točk) Določi bazi za jedro $\ker \phi$ in sliko $\text{im } \phi$.

3. naloga (25 točk)

Naj bo

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + xy - xy^2 + \frac{y^2}{2} - y$$

a) (15 točk) Določi stacionarne točke funkcije f .

b) (10 točk) Klasificiraj stacionarne točke funkcije f .

4. naloga (25 točk)

Naj bo $A \in \mathbb{R}^n$ dana pozitivno definitna simetrična matrika, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ pa dan vektor (stolpec). Definirajmo funkcijo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ s pravilom

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A^{-1} \mathbf{x}$$

(inverz A^{-1} obstaja po predpostavki, da je A pozitivno definitna). Poiskati želimo ekstreme funkcije f pri pogoju

$$\mathbf{b}^\top \mathbf{x} = 1$$

a) (5 točk) Zapiši ustrezno Lagrangeovo funkcijo.

b) (5 točk) Zapiši sistem enačb za stacionarne točke Lagrangeove funkcije.

c) (10 točk) Poišči (splošen) izraz za rešitev problema.

d) (5 točk) Kakšnega tipa ekstrem (minimum ali maksimum) je stacionarna točka? Na to vprašanje lahko pravilno odgovoriš, tudi če nisi rešil (c) naloge.