Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Računski izpit iz Matematike 1

7. februar 2022

Čas pisanja: **90 minut**. *Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 za pomoč. Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, pametnega telefona in ostalih elektronskih naprav je* **strogo** *prepovedano.*

1. naloga (25 točk)

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Definirajmo še

$$C = A^2 \otimes B + A \otimes B^2$$

Matrike C *ni* potrebno računati.

a) (6 točk) Poišči vse lastne vrednosti in lastne vektorje matrik A in B. Ali je možno obe matriki diagonalizirati?

b) (10 točk) Naj bo $\mathbf{v}$ lastni vektor matrike A z lastno vrednostjo λ, $\mathbf{u}$ pa lastni vektor matrike B z lastno vrednostjo μ. Pokaži, da je $\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$ lastni vektor matrike C. Kako se izraža pripadajoča lastna vrednost?

c) (9 točk) Določi vse lastne vrednosti matrike C. Koliko linearno neodvisnih lastnih vektorjev ima?

2. naloga (25 točk)

Preslikava $\phi\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ je dana s predpisom

$$\phi(p) = \begin{bmatrix} p(0) & p'(0) \\ p(1) & p'(1) \end{bmatrix}$$

a) (5 točk) Utemelji, da je ϕ linearna preslikava.

b) (5 točk) Naj bo $\mathcal{B} = \{p_0, p_1, p_2\}$ množica polinomov, kjer je

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1 \\ p_1(x) &= x+1 \\ p_2(x) &= x^2-1 \end{aligned}$$

Utemelji, da je $\mathcal{B}$ baza za vektorski prostor polinomov $\mathbb{R}_2[x]$.

c) (10 točk) Zapiši matriko, ki pripada preslikavi ϕ glede na bazo $\mathcal{B}$ za $\mathbb{R}_2[x]$ in standardno bazo $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

d) (5 točk) Določi $\dim(\ker(\phi))$ in $\dim(\operatorname{im}(\phi))$.

3. naloga (25 točk)

Homogeno telo $D \subseteq \mathbb{R}^3$ je dano z

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z^2 \geq x^2 + y^2, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

Poišči koordinate masnega središča tega telesa.
Koordinate masnega središča homogenega telesa D so dane z

$$x^* = \frac{1}{m} \iiint_D x\, dxdydz,\ y^* = \frac{1}{m} \iiint_D y\, dxdydz \text{ ter } z^* = \frac{1}{m} \iiint_D z\, dxdydz,$$

kjer je $m = \iiint_D dxdydz$.
Mogoče bo prav prišel tudi nedoločeni integral: $\int \cos^2(t)dt = \frac{1}{4}(2t + \sin(2t))$.

4. naloga (25 točk)

Funkcija treh spremenljivk f ima predpis

$$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + yz + zx).$$

a) (15 točk) Izračunaj gradient in poišči vse stacionarne točke funkcije f.

b) (10 točk) Katere od teh stacionarnih točk so lokalni minimi oziroma maksimi? Utemelji!