Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. Računski izpit iz Matematike 1

20. januar 2023

Čas pisanja: **90 minut**. *Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 za pomoč. Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, pametnega telefona in ostalih elektronskih naprav je* **strogo** *prepovedano.*

1. naloga (25 točk)

Dani sta matriki

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix} \text{ in } B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 19 \end{pmatrix}$$

a) (10 točk) Katera od matrik A in B je pozitivno definitna?

Rešitev :

b) (15 točk) Za tisto matriko, ki je pozitivno definitna, izračunaj razcep Choleskega.

2. naloga (25 točk)

V vektorskem prostoru polinomov $\mathbb{R}_3[x]$ definiramo vektorski podprostor *lihih* polinomov

$$\mathcal{U} = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \,:\, p(-x) = -p(x)\}.$$

Ni potrebno dokazovati, da je $\mathcal{U}$ res vektorski podprostor v $\mathbb{R}_3[x]$. Definirajmo preslikavo

$$\phi\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}_3[x] \quad \text{s predpisom} \quad \phi(p)(x) = x\,p''(x) - 2p'(x).$$

a) (3 točke) Zapiši bazo $\mathcal{B}$ vektorskega prostora $\mathcal{U}$. (Ni treba utemeljevati, da je res baza.) Koliko je $\dim(\mathcal{U})$?

b) (5 točk) Pokaži, da je ϕ linearna preslikava.

c) (9 točk) Zapiši matriko A_ϕ, ki pripada preslikavi ϕ glede na bazo $\mathcal{B}$ ter standardno bazo $\mathcal{S} = \{1, x, x^2, x^3\}$ prostora $\mathbb{R}_3[x]$.

d) (8 točk) Določi bazi jedra ter slike preslikave ϕ.

3. naloga (25 točk)

Določi maso in z-koordinato masnega središča krogle, ki je opisana z neenačbo

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq z,$$

kjer je gostota v vsaki točki enaka oddaljenosti točke od (x, y) ravnine.
Namig : Uporabi krogelne koordinate.

4. naloga (25 točk)

Poiskati želimo točki v prostoru, ki sta na preseku paraboloida

$$z = x^2 + y^2$$

in ravnine

$$x + y + z = 4$$

najbolj in najmanj oddaljeni od z-osi.

a) (6 točk) Zapiši ustrezno Lagrangeovo funkcijo. Namesto razdalje od z-osi vzemi kvadrat razdalje od z-osi, saj ima razdalja ekstremno vrednost natanko tam, kjer ima tudi kvadrat razdalje ekstremno vrednost.

b) (5 točk) Zapiši sistem enačb, ki ga je potrebno rešiti.

c) (14 točk) Reši sistem in določi ekstremne točke.