Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
Σ	

Računski izpit iz Matematike 1

18. januar 2022

Čas pisanja: **90 minut**. *Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 za pomoč. Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, pametnega telefona in ostalih elektronskih naprav je* **strogo** *prepovedano.*

1. naloga

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Poišči diagonalno matriko D in ortogonalno matriko U, da bo $A = UDU^{\mathsf{T}}$. (10 točk)

b) Poišči matriko ranga 1, ki je v Frobeniusovi normi najbližja $A \otimes A$. (15 točk)
(Ni ne potrebno, niti zaželeno, da izračunate matriko $A \otimes A$.)

(a) $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$

$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 4$ lastni vrednosti A

$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

- Lastni vektor za l. vred. $\lambda_2 = 4$:

$A - 4I = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dots \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \dots \vec{q}_2 = \frac{1}{\|\vec{v}_2\|} \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

- Lastni vektor za l. vred. $\lambda_1 = -1$:

$\vec{v}_1$ je pravokoten na $\vec{v}_2$ (saj je A simetrična), torej $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \dots \vec{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\dots U = [\vec{q}_1, \vec{q}_2] = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) Največja lastna (in singularna) vrednost $A \otimes A$ je $\sigma := \lambda_2 \cdot \lambda_2 = 16$ s pripadajočim lastnim (in singularnim) vektorjem $\vec{s} := \vec{q}_2 \otimes \vec{q}_2 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

Po Eckart-Youngovem izreku je aproksimacija ranga 1 za $A \otimes A$ matrika:

$$\sigma \vec{s} \vec{s}^{\mathsf{T}} = \frac{16}{25} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 8 & 16 \end{bmatrix}.$$

2. naloga (25 točk)

Linearna preslikava $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ poljuben vektor $\mathbf{v}$ najprej pravokotno prezrcali preko ravnine $x = y$ nato pa še preko ravnine $y = z$.

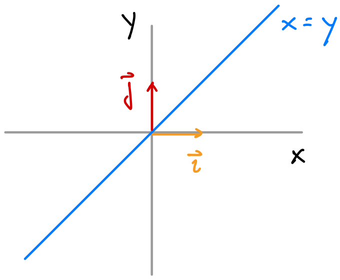
a) (5 točk) Utemelji, da je ϕ linearna izometrija.

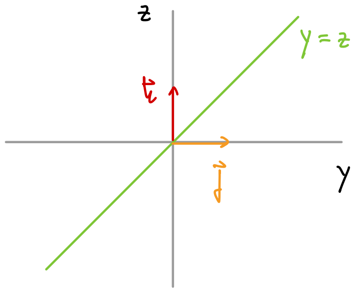
b) (10 točk) Zapiši matriko linearne preslikave ϕ v standardni bazi.

c) (15 točk) Kakšna izometrija je ϕ? Izračunaj vse lastne vrednosti in še lastni vektor za realno lastno vrednost.

(a) ϕ je kompozitum dveh lin. izometrij, torej je linearna in je izometrija.

(b)





$\vec{i} \mapsto \vec{j} \mapsto \vec{k}$

$\vec{j} \mapsto \vec{i} \mapsto \vec{i}$

$\vec{k} \mapsto \vec{k} \mapsto \vec{j}$

$$A_\phi = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{array}$$

(c) $$\det(A_\phi - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \underbrace{\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix}}_{-\lambda^3} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix}}_{1} = 1 - \lambda^3 = 0$$

$\ldots\ \lambda_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$; $\lambda_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $\lambda_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$, $\lambda_3 = 1$

Last. vekt. za $\lambda_3 = 1$: $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ϕ je torej zasuk za kot $\frac{2\pi}{3}$ $(= 120^\circ)$ z osjo vrtenja $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. naloga (25 točk)

Telo $D \subseteq \mathbb{R}^3$ opišemo z neenačbama

$$x^2+y^2+z^2 \le 5 \quad \text{ter} \quad x^2+y^2-z^2 \ge 3.$$

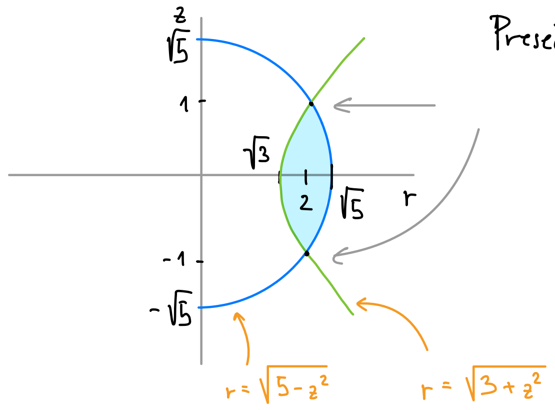
a) (5 točk) Opiši to telo v valjnih koordinatah

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \\ z &= z, \end{aligned}$$

in ga skiciraj v (r,z)-ravnini (pri poljubnem kotu φ).

b) (20 točk) Izračunaj prostornino telesa D.

(a) $x^2+y^2=r^2$ ... $\underline{r^2+z^2 \le 5}$, $\underline{r^2-z^2 \ge 3}$



Presečišči, ko $r^2+z^2=5$

$r^2-z^2=3$

$2r^2=8$

$r=2$

... $z=\pm 1$

(b) $\boxed{V} = \iiint\limits_D dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\left(\int_{-1}^{1}\left(\int_{\sqrt{3+z^2}}^{\sqrt{5-z^2}} r\,dr\right)dz\right)d\varphi = 2\pi\int_{-1}^{1}\left(\frac{r^2}{2}\Big|_{r=\sqrt{3+z^2}}^{r=\sqrt{5-z^2}}\right)dz =$

v valjnih koordinatah

$= \pi\int_{-1}^{1}(2-2z^2)\,dz = \pi\cdot\left(2z-\frac{2z^3}{3}\right)\Big|_{z=-1}^{z=1} \boxed{= \frac{8\pi}{3}}.$

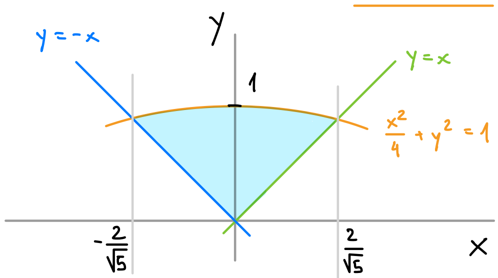
4. naloga (25 točk)

Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije

$$f(x,y) = xy$$

na območju

$$D = \{(x,y) : \underline{\frac{x^2}{4} + y^2 \le 1}, \underline{y \ge x}, \underline{y \ge -x}\}$$



$$\frac{x^2}{4} + x^2 = 1 \quad \dots \quad x^2 = \frac{4}{5} \quad \dots \quad x = \pm\frac{2}{\sqrt5}$$

- kandidati v notranjosti: $f_x = 0 \;\dots\; y = 0$, $f_y = 0 \;\dots\; x = 0$ $\quad \cancel{T(0,0)}$ (ni v notranjosti)

- kandidati na robu:
  - elipsa: $L(x,y,\lambda) = xy - \lambda\left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1\right)$

    $L_x = y - \lambda\frac{x}{2} = 0 \;\dots\; y - \lambda^2 y = 0 \;..\; y(1-\lambda^2) = 0 \;\dots\; \lambda = \pm 1$ ali $y = 0$

    $L_y = x - 2\lambda y = 0 \;\dots\; x = 2\lambda y$

    $L_\lambda = -\left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1\right) = 0$

    $\lambda = \pm1$: $x = \pm 2y$, $2y^2 = 1$, $y = \frac{1}{\sqrt2}$ ($y = -\frac{1}{\sqrt2}$ ne leži na danem loku elipse) $\Rightarrow$ $\cancel{T_{1,2}\left(\pm\sqrt2, \frac{1}{\sqrt2}\right)}$ (tudi <u>ne</u> leži na danem loku elipse)

    $y = 0$: $x^2 = 4$, $x = \pm 2$ $\quad \cancel{T(\pm 2, 0)}$ (ne leži na danem loku elipse)

  - daljica $y = x$:

    $f(x,x) = x^2$ za $x \in [0, \frac{2}{\sqrt5}]$.

    Kandidati so le na robu intervala:

    $f(0,0) = 0$

    $f\left(\frac{2}{\sqrt5}, \frac{2}{\sqrt5}\right) = \frac{4}{5}$ ← max. vrednost

  - daljica $y = -x$

    $f(x,-x) = -x^2$ za $x \in [-\frac{2}{\sqrt5}, 0]$.

    Kandidati so le na robu intervala:

    $f\left(-\frac{2}{\sqrt5}, \frac{2}{\sqrt5}\right) = -\frac{4}{5}$ ← min. vrednost

    $f(0,0) = 0$

> f zavzame največjo vrednost $\frac{4}{5}$ v točki $\left(\frac{2}{\sqrt5}, \frac{2}{\sqrt5}\right)$ in najmanjšo vrednost $-\frac{4}{5}$ v točki $\left(-\frac{2}{\sqrt5}, \frac{2}{\sqrt5}\right)$.