Ime in priimek: ________________________ Vpisna številka: ____________________

	naloge 1-3	naloge 4-8	Skupaj
točke	32 + 16	70	118

MCQ 1a, 1b, 3a, 3b

IZPIT IZ MATEMATIKE 1, TEORETIČNI DEL
29. avgust 2024

(Pri vsaki od nalog 1.-3. obkrožite vse pravilne odgovore. Za vsak pravilno obkrožen odgovor boste dobili 4 točke, za vsak napačno obkrožen odgovor pa -2 točki. Pri teh nalogah odgovorov ni potrebno utemeljevati.)

1. Naj bosta $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^4$ enotska vektorja, za katera velja $\vec{x}^\top \vec{y} = 0$ in naj bo

$$A = 3\vec{x}\vec{x}^\top - 4\vec{y}\vec{y}^\top.$$

(4 točke) Izračunajte sled matrike A.

$$\operatorname{tr}(3xx^T - 4yy^T) \underset{\text{linearnost}}{=} 3\operatorname{tr}(xx^T) - 4\operatorname{tr}(yy^T) \underset{\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)}{=} 3\operatorname{tr}(\underbrace{x^Tx}_{\|x\|^2=1}) - 4\operatorname{tr}(\underbrace{y^Ty}_{\|y\|^2=1}) = 3-4 = -1$$

(4 točke) Izračunajte Frobeniusovo normo matrike A.

$$\|A\|_F^2 = \operatorname{tr}(AA^T) = \operatorname{tr}(9x\underbrace{x^Tx}_{=1}x^T - 12x\underbrace{x^Ty}_{=0}y^T - 12y\underbrace{y^Tx}_{=0}x^T + 16y\underbrace{y^Ty}_{=1}y^T)$$

$$= \operatorname{tr}(9xx^T + 16yy^T) = 9\operatorname{tr}(xx^T) + 16\operatorname{tr}(yy^T) = 9 + 16 = 25$$ isti argument kot v a)

$\Rightarrow \|A\|_F = 5$

Katere od naslednjih trditev so vedno resnične?

A. A je simetrična

B. $\operatorname{rang}(A) = 2$

C. $\det(A) = -12$ $\det(A) = 0$

D. $A^2 = 9\vec{x}\vec{x}^\top + 16\vec{y}\vec{y}^\top$ $A^2 = AA^T$ (izračunano v b))

E. $\vec{y}$ je lastni vektor za A pri lastni vrednosti 4. -4 $Ay = 3x\underbrace{x^Ty}_{=0} - 4y\underbrace{y^Ty}_{=1} = -4y$

F. Za matriko A obstaja razcep Choleskega.

G. Singularne vrednosti matrike A so 4, 3, 0 in 0.

H. Najboljši približek ranga 1 matrike A v Frobeniusovi normi je matrika $-4\vec{y}\vec{y}^\top$.

I. A je ortogonalno podobna matriki $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

2. Želimo poiskati vse točke na ploskvi $p(x, y, z) = 0$ v $\mathbb{R}^3$, ki so najbolj oddaljene od koordinatnega izhodišča. Stacionarne točke katere funkcije moramo poiskati?

A. $p(x, y, z)$

B. $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

C. $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \lambda p(x, y, z)$

D. $p(x, y, z) - \lambda \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

3. Naj bodo $p, q, F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neskončnokrat zvezno odvedljive funkcije. Želimo poiskati najmanjšo vrednost funkcije F na preseku območij $p(\mathbf{x}) = 0$ in $q(\mathbf{x}) \geq 0$. $-q(x) \leq 0$

(4 točke) Zapišite Lagrangevo funkcijo zgornjega problema.

$L(\underline{x}, \lambda, \mu) = F(\underline{x}) - \lambda p(\underline{x}) - \mu(-q(\underline{x})) =$

$= F(\underline{x}) - \lambda p(\underline{x}) + \mu q(\underline{x})$

(Tu ste lahko zapisali poljubne predznake, saj še ni omejitve na predznak prirejene spremenljivke)

(4 točke) Zapišite prirejeno funkcijo zgornjega problema.

$K(\lambda, \mu) = \inf_{\underline{x}} L(x, \lambda, \mu) = \inf_{\underline{x}} \{F(\underline{x}) - \lambda p(\underline{x}) + \mu q(\underline{x})\}$

Zapišemo Karush-Kuhn-Tuckerjeve pogoje, kjer sta λ in $\mu \leq \mathbf{0}$ prirejeni spremenljivki, ki zaporedoma pripadata pogojema $p(\mathbf{x}) = 0$ in $q(\mathbf{x}) \geq 0$. Kateri od naslednjih pogojev so del Karush-Kuhn-Tuckerjevih pogojev našega problema?

A. $(\operatorname{grad} F)(\mathbf{x}) - \lambda(\operatorname{grad} p)(\mathbf{x}) - \mu(\operatorname{grad} q)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

B. $(\operatorname{grad} F)(\mathbf{x}) - \lambda(\operatorname{grad} p)(\mathbf{x}) + \mu(\operatorname{grad} q)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

C. $(\operatorname{grad} F)(\mathbf{x}) + \lambda(\operatorname{grad} p)(\mathbf{x}) + \mu(\operatorname{grad} q)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

D. $(\operatorname{grad} p)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

E. $(\operatorname{grad} q)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

F. $F(\mathbf{x}) = 0$

G. $p(\mathbf{x}) = 0$

H. $\lambda \leq 0$

I. $q(\mathbf{x}) = 0$

J. $q(\mathbf{x}) \leq 0$

K. $\mu q(\mathbf{x}) = 0$

L. $\mu q(\mathbf{x}) \leq 0$

Pri vsaki od nalog 4.-8. dobro utemeljite vse svoje odgovore in korake pri sklepanju. Za odgovore brez utemeljitev ne boste prejeli točk.

4. (10 točk) Zapišite primer vektorskega podprostora v $\mathbb{R}^{3\times 3}$ dimenzije 3.

$\left\{\begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}, \left\{\begin{bmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{bmatrix}\right\}, \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\right\}, \ldots$

+ argument

5. (10 točk) Naj bo $\tau\colon U \to V$ bijektivna linearna preslikava iz vektorskega prostora U v vektorski prostor V. Pokažite, da je njen inverz $\tau^{-1}\colon V \to U$ tudi linearna preslikava.

$v, w \in V,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\tau^{-1}(\alpha v + \beta w) = \tau^{-1}(\alpha \tau(u_v) + \beta \tau(u_w)) \overset{\tau \text{ je linearna}}{=} \underbrace{\tau^{-1}(\tau}_{}(\alpha u_v + \beta u_w)) = \rightsquigarrow$$

τ je bijekcija, zato obstajata $u_v \in U$ in $u_w \in U$, da je

$v = \tau(u_v)$ in

$w = \tau(u_w)$

oz. $u_v = \tau^{-1}(v)$ in

$u_w = \tau^{-1}(w)$

τ je bijekcija, zato $\tau^{-1} \circ \tau = \tau \circ \tau^{-1} = id$

$$\rightsquigarrow = \alpha u_v + \beta u_w = \alpha \tau^{-1}(v) + \beta \tau^{-1}(w)$$

6. (20 točk) Naj ima matrika $A \in \mathbb{R}^{7\times5}$ singularne vrednosti 4, 4, 4, 0 in 0 in matrika $B \in \mathbb{R}^{5\times3}$ singularne vrednosti 2, 1 in 1.

A. Zapišite vse lastne vrednosti matrike $\overbrace{(A^\top A)}^{5\times5} \otimes \overbrace{(B^\top B)}^{3\times3}$ in pri vsaki njeno večkratnost.

singularne vrednosti A je množica $\{\sqrt{\lambda}\ ;\ \lambda \text{ lastna vrednost } A^TA\}$

$\Rightarrow$ lastne vrednosti (A^TA) so kvadrati singularnih vrednosti

$\Rightarrow$ l. vred. (A^TA) so $4^2, 4^2, 4^2, 0, 0$ oz. $\boxed{2^4, 2^4, 2^4, 0, 0}$

podobno: l. vred. (B^TB) so $\boxed{2^2, 1, 1}$

l. vrednosti $(A^TA)\otimes(B^TB)$ so vsi produkti in :

$2^6\ (3x),\ 2^4\ (6x),\ 0\ (6x)$

B. Izračunajte $\|A \otimes B\|_F$.

1. $\|A\otimes B\|_F^2 = tr((A\otimes B)^T(A\otimes B)) = tr((A^T\otimes B^T)(A\otimes B)) =$

$= tr(A^TA \otimes B^TB) =$ vsota vseh lastnih vrednosti (A-del)

$= 3\cdot2^6 + 6\cdot2^4 + 6\cdot0 =$

$= 3\cdot2^6 + 3\cdot2^5 = 3\cdot2^5(2+1) = 3^2\cdot2^5$

$\Rightarrow \|A\otimes B\|_F = 3\cdot2^2\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

ali

vsota kvadratov sing. vrednosti: $8\ (3x),\ 4\ (6x),\ 0\ (6x)$

2. $\|A\otimes B\|_F^2 = 3\cdot8^2 + 6\cdot4^2 + 6\cdot0 =$ (enako kot zgoraj) $= 3^2\cdot2^5$

$\Rightarrow \|A\otimes B\|_F = 12\sqrt{2}$

3. $\|A\otimes B\|_F^2 = \|A\|_F^2\|B\|_F^2 = (3\cdot4^2)(4+1+1) = 3\cdot4^2\cdot6 = 3^2\cdot4^2\cdot2$ ✓

* Pozabi bi vas opozorila, da singularne in lastne vrednosti matrik v splošnem niso enake.

* Matriki A ne morete določiti lastnih vrednosti, saj ni kvadratna (je velikosti 7x5). Prav tako ne B.

7. (10 točk) Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$

$$A+A^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

in definirajmo funkcijo $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(\vec{x}) = -2\vec{x}^{\mathsf{T}} A \vec{x} + \|\vec{x}\|^2.$$

Ali je funkcija f konveksna? Svoj odgovor dobro utemeljite.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = -2\vec{x}^T(A+A^T) + 2\vec{x}^T = 2\vec{x}^T(-(A+A^T)+I)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{x}^2} = \frac{\partial}{\partial \vec{x}}\left(2(-(A+A^T)+I)\vec{x}\right) = 2(-(A+A^T)+I) =$$

$$= 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & & & & \\ & 5 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 5 & \\ & & & & 3 \end{bmatrix} \leftarrow \text{PD matrika}$$

$\Rightarrow f$ je konveksna

8. (20 točk) Naj bo

$$\mathcal{D} = \{(x,y,z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2+y^2+z^2 \leq 4, x^2+y^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

V spodnjih sedem pravokotnikov zapišite ustrezne meje pri integriranju funkcije f po območju $\mathcal{D}$ v valjnih/cilindričnih koordinatah. Poleg tega razločno skicirajte sliko območja $\mathcal{D}$ in utemeljite vse korake pri določanju mej v integralih.

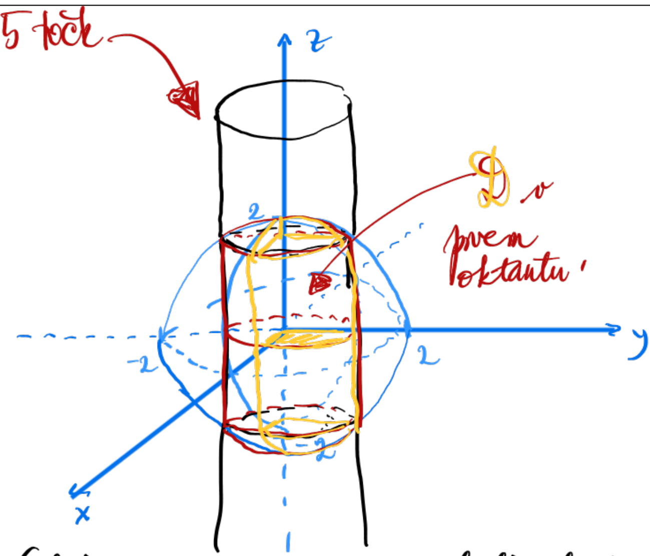
4 točke 4 točke 4 točke

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{\boxed{0}}^{\boxed{1}} \left(\int_{\boxed{0}}^{\boxed{\pi/2}} \left(\int_{\boxed{0}}^{\boxed{\sqrt{4-r^2}}} \boxed{f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r} \, dz \right) d\varphi \right) dr.$$

determinanta Jacobijeve matrike

3 točke

5 točk



$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}\ \boxed{\varphi \in [0, \pi/2]}$

$z \geq 0 \rightarrow z \geq 0$

$x^2+y^2+z^2 \leq 4 \rightarrow r^2+z^2 \leq 4$

$\Rightarrow z^2 \leq 4-r^2, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{4-r^2}$

$x^2+y^2 \leq 1 \rightarrow r^2 \leq 1 \rightarrow \boxed{r \leq 1}$

(Skico ste lahko naredili tudi v projekcijah.)