Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: __________________

	naloge 1-4	naloge 5-8	Skupaj
točke			

IZPIT IZ MATEMATIKE 1, TEORETIČNI DEL
29. avgust 2024

(Pri vsaki od nalog 1.-3. obkrožite vse pravilne odgovore. Za vsak pravilno obkrožen odgovor boste dobili 4 točke, za vsak napačno obkrožen odgovor pa -2 točki. Pri teh nalogah odgovorov ni potrebno utemeljevati.)

1. Naj bosta $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^4$ enotska vektorja, za katera velja $\vec{x}^\mathsf{T}\vec{y} = 0$ in naj bo

$$A = 3\vec{x}\vec{x}^\mathsf{T} - 4\vec{y}\vec{y}^\mathsf{T}.$$

(4 točke) Izračunajte sled matrike A.

$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(3\vec{x}\vec{x}^T) - \mathrm{tr}(4\vec{x}\vec{x}^T) = 3\mathrm{tr}(\vec{x}\vec{x}^T) - 4\mathrm{tr}(\vec{y}\vec{y}^T) = 3-4 = \underline{\underline{-1}}$

(4 točke) Izračunajte Frobeniusovo normo matrike A.

$\|A\|_F^2 = \mathrm{tr}(A^T A) = (3\vec{x}\vec{x}^T - 4\vec{y}\vec{y}^T)(3\vec{x}\vec{x}^T - 4\vec{y}\vec{y}^T) = 9\vec{x}\vec{x}^T\vec{x}\vec{x}^T - 24\vec{x}\vec{x}^T\vec{y}\vec{y}^T + 16\vec{y}\vec{y}^T\vec{y}\vec{y}^T =$

$= 9 + 16 = 25$

$\|A\|_F = \underline{\underline{5}}$

Katere od naslednjih trditev so vedno resnične?

A. A je simetrična

B. $\mathrm{rang}(A) = 2$

C. $\det(A) = -12$

D. $A^2 = 9\vec{x}\vec{x}^\mathsf{T} + 16\vec{y}\vec{y}^\mathsf{T}$

E. $\vec{y}$ je lastni vektor za A pri lastni vrednosti 4.

F. Za matriko A obstaja razcep Choleskega.

G. Singularne vrednosti matrike A so 4, 3, 0 in 0.

H. Najboljši približek ranga 1 matrike A v Frobeniusovi normi je matrika $4\vec{y}\vec{y}^\mathsf{T}$.

I. A je ortogonalno podobna matriki $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

2. Želimo poiskati vse točke na ploskvi $p(x,y,z) = 0$ v $\mathbb{R}^3$, ki so najbolj oddaljene od koordinatnega izhodišča. Stacionarne točke katere funkcije moramo poiskati?

A. $p(x,y,z)$

B. $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

C. $\sqrt{x^2+y^2+z^2} - \lambda p(x,y,z)$

D. $p(x,y,z) - \lambda\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

3. Naj bodo $p, q, F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neskončnokrat zvezno odvedljive funkcije. Želimo poiskati najmanjšo vrednost funkcije F na preseku območij $p(\mathbf{x}) = 0$ in $q(\mathbf{x}) \geq 0$.

(4 točke) Zapišite Lagrangevo funkcijo zgornjega problema.

$$L(x,\lambda,\mu) = F(x) - \lambda p(x) + \mu g(x)$$

(4 točke) Zapišite prirejeno funkcijo zgornjega problema.

$$K(\lambda,\mu) = \inf_x L(x,\lambda,\mu)$$

Zapišemo Karush-Kuhn-Tuckerjeve pogoje, kjer sta λ in $\mu \leq \mathbf{0}$ prirejeni spremenljivki, ki zaporedoma pripadata pogojema $p(\mathbf{x}) = 0$ in $q(\mathbf{x}) \geq 0$. Kateri od naslednjih pogojev so del Karush-Kuhn-Tuckerjevih pogojev našega problema?

A. $(\operatorname{grad} F)(\mathbf{x}) - \lambda(\operatorname{grad} p)(\mathbf{x}) - \mu(\operatorname{grad} q)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

B. $(\operatorname{grad} F)(\mathbf{x}) - \lambda(\operatorname{grad} p)(\mathbf{x}) + \mu(\operatorname{grad} q)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

C. $(\operatorname{grad} F)(\mathbf{x}) + \lambda(\operatorname{grad} p)(\mathbf{x}) + \mu(\operatorname{grad} q)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

D. $(\operatorname{grad} p)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

E. $(\operatorname{grad} q)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

F. $F(\mathbf{x}) = 0$

G. $p(\mathbf{x}) = 0$

H. $\lambda \leq 0$

I. $q(\mathbf{x}) = 0$

J. $q(\mathbf{x}) \leq 0$

K. $\mu q(\mathbf{x}) = 0$

L. $\mu q(\mathbf{x}) \leq 0$

Pri vsaki od nalog 4.-8. dobro utemeljite vse svoje odgovore in korake pri sklepanju. Za odgovore brez utemeljitev ne boste prejeli točk.

4. (10 točk) Zapišite primer vektorskega podprostora v $\mathbb{R}^{3\times 3}$ dimenzije 3.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_1+b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_1+c_2 \end{bmatrix} \to \text{zaprta za seštevanje}$$

$$\alpha \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & 0 & 0 \\ 0 & \alpha b & 0 \\ 0 & 0 & \alpha c \end{bmatrix} \to \text{zaprta za množenje}$$

5. (10 točk) Naj bo $\tau\colon U \to V$ bijektivna linearna preslikava iz vektorskega prostora U v vektorski prostor V. Pokažite, da je njen inverz $\tau^{-1}\colon V \to U$ tudi linearna preslikava.

$\tau(u) = v \qquad \tau^{-1}(v) = u$

$\tau(u_1+u_2) = \tau(u_1) + \tau(u_2) = v_1 + v_2$

$\tau^{-1}(v_1+v_2) = \tau^{-1}(v_1) + \tau^{-1}(v_2) = u_1 + u_2$

$\tau(cu) = c\tau(u) = cv$

$\tau^{-1}(cv) = c\tau(v) = cu$

6. (20 točk) Naj ima matrika $A \in \mathbb{R}^{7\times 5}$ singularne vrednosti 4, 4, 4, 0 in 0 in matrika $B \in \mathbb{R}^{5\times 3}$ singularne vrednosti 2, 1 in 1.

A. Zapišite vse lastne vrednosti matrike $(A^\mathsf{T}A)\otimes(B^\mathsf{T}B)$ in pri vsaki njeno večkratnost.

$A^T A \to 16, 16, 16, 0, 0$

$B^T B \to 4, 1, 1$

$A^T A \otimes B^T B \to 3\times 64,\ 6\times 16,\ 6\times 0$

B. Izračunajte $\|A \otimes B\|_F$.

$\|A\otimes B\|_F = \|A\|_F \cdot \|B\|_F = \sqrt{4^2+4^2+4^2+0^2+0^2} \cdot \sqrt{2^2+1^2+1^2} =$

$= \sqrt{48} \cdot \sqrt{6} = 12\sqrt{2}$

7. (10 točk) Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$

in definirajmo funkcijo $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(\vec{x}) = -2\vec{x}^{\mathsf{T}} A\vec{x} + \|\vec{x}\|^2.$$

Ali je funkcija f konveksna? Svoj odgovor dobro utemeljite.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2\left(A\vec{x} + A^{\mathsf{T}}\vec{x}\right) + 2\vec{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{x}^2} = -2A^{\mathsf{T}} - 2A + 2I = -2\left(A^{\mathsf{T}} + A - I\right) = -2\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

H_f je PD, kar pomeni, da je f konveksna

$$H_f = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

8. (20 točk) Naj bo

$$\mathcal{D} = \{(x,y,z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

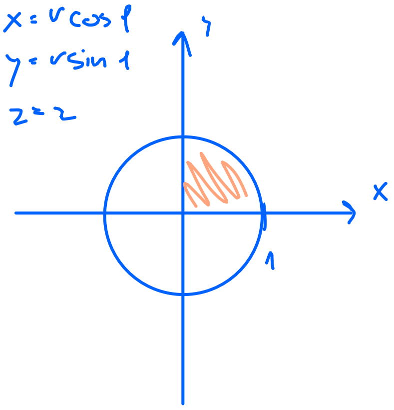
V spodnjih sedem pravokotnikov zapišite ustrezne meje pri integriranju funkcije f po območju $\mathcal{D}$ v valjnih/cilindričnih koordinatah. Poleg tega razločno skicirajte sliko območja $\mathcal{D}$ in utemeljite vse korake pri določanju mej v integralih.

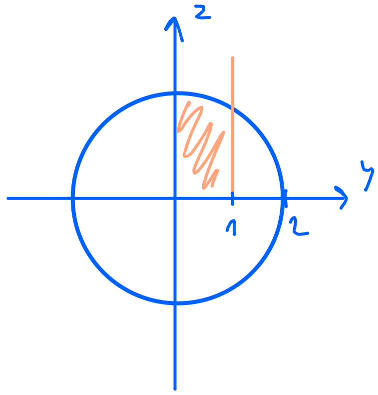
$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{\boxed{0}}^{\boxed{1}} \left(\int_{\boxed{0}}^{\boxed{\frac{\pi}{2}}} \left(\int_{\boxed{0}}^{\boxed{\sqrt{4-r^2}}} \boxed{r} \, dz \right) d\varphi \right) dr \quad .$$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$z = z$





$r^2 + z^2 \leq 4$

$r^2 \leq 1$

$r \leq 1$