Ime in priimek: Polona

Vpisna številka: ______________

	naloge 1-4	naloge 5-9	Skupaj
točke	44 + 4	70	118

IZPIT IZ MATEMATIKE 1, TEORETIČNI DEL
7. februar 2024

Pri vsaki od nalog 1.-4. obkrožite vse pravilne odgovore in odgovorite na podvprašanja. Za vsak pravilno obkrožen odgovor boste dobili 4 točke, za vsak napačno obkrožen odgovor pa -2 točki. Pri teh nalogah odgovorov ni potrebno utemeljevati.

$11 \cdot 4$
$26 \cdot (-2)$

1. Za katere od naslednjih matrik obstaja razcep Choleskega?

A. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

2. Naj bo $\tau\colon \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^6$ linearna preslikava, za katero velja

$$\tau\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \tau\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right) \text{ in } \tau\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Katere od naslednjih trditev so gotovo resnične?

A. $\dim(\ker(\tau)) \geq 1$.

B. $\dim(\operatorname{im}(\tau)) \geq 1$.

C. $\dim(\operatorname{im}(\tau)) = 5$.

D. τ je injektivna.

E. τ je surjektivna.

F. 0 je lastna vrednost preslikave τ.

G. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$ je v sliki preslikave τ.

H. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ je v jedru preslikave τ.

I. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ je lastni vektor preslikave τ.

J. Vsaka matrika, ki pripada preslikavi τ, je velikosti 2×3.

K. Determinanta matrike, ki pripada preslikavi τ iz standardne baze prvega prostora v standardno bazo drugega prostora, je enaka 0.

3. Katere od naslednjih trditev so resnične za vsako dvakrat zvezno odvedljivo funkcijo $f\colon \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}$, katere Hessejeva matrika v $\underbrace{\text{stacionarni točki } \mathbf{a}}_{(\operatorname{grad} f(a) = 0)}$ je $\underbrace{\text{negativno definitna}}$?

$Hf(a)$ ND $\Rightarrow \det Hf(a) > 0$

A. Determinanta Hessejeve matrike funkcije f v točki $\mathbf{a}$ je $\mathbf{0}$.

B. Determinanta Hessejeve matrike funkcije f v točki $\mathbf{a}$ je negativna.

C. Determinanta Hessejeve matrike funkcije f v točki $\mathbf{a}$ je pozitivna.

D. Hessejeva matrika funkcije f je v vsaki točki $\mathbf{x}$ negativno definitna.

E. Za Hessejevo matriko funkcije f v točki $\mathbf{a}$ obstaja razcep Choleskega.

F. Gradient funkcije f v točki $\mathbf{a}$ je $\mathbf{0}$.

G. f ima v točki $\mathbf{a}$ lokalni minimum.

H. f ima v točki $\mathbf{a}$ lokalni maksimum.

I. f v točki $\mathbf{a}$ nima lokalnega ekstrema.

J. O lokalnih ekstremih funkcije f v točki $\mathbf{a}$ ne moremo trditi ničesar.

4. Naj bodo $p, q, F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neskončnokrat zvezno odvedljive funkcije. Želimo poiskati najmanjšo vrednost funkcije F na preseku območij $\underbrace{p(\mathbf{x}) \geq 0}_{\mu_1}$ in $\underbrace{q(\mathbf{x}) \leq 0}_{\mu_2}$.

(4 točke) Zapišite Lagrangevo funkcijo zgornjega problema.

$$L(\underline{x}, \mu_1, \mu_2) = F(\underline{x}) - \mu_1(-p(\underline{x})) - \mu_2 q(\underline{x}) = F(\underline{x}) + \mu_1 p(\underline{x}) - \mu_2 q(\underline{x})$$

(4 točke) Zapišite prirejeno funkcijo zgornjega problema.

$$K(\mu_1, \mu_2) = \inf_{\underline{x}} \{F(\underline{x}) + \mu_1 p(\underline{x}) - \mu_2 q(\underline{x})\}$$

Zapišemo Karush-Kuhn-Tuckerjeve pogoje, kjer sta $\lambda \leq \mathbf{0}$ in $\mu \leq \mathbf{0}$ prirejeni spremenljivki, ki zaporedoma pripadata pogojema $p(\mathbf{x}) \geq 0$ in $q(\mathbf{x}) \leq 0$. Kateri od naslednjih pogojev so del Karush-Kuhn-Tuckerjevih pogojev našega problema?

A. $(\operatorname{grad} F)(\mathbf{x}) - \lambda(\operatorname{grad} p)(\mathbf{x}) - \mu(\operatorname{grad} q)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

B. $(\operatorname{grad} F)(\mathbf{x}) + \lambda(\operatorname{grad} p)(\mathbf{x}) - \mu(\operatorname{grad} q)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

C. $(\operatorname{grad} F)(\mathbf{x}) + \lambda(\operatorname{grad} p)(\mathbf{x}) + \mu(\operatorname{grad} q)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

D. $(\operatorname{grad} F)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

E. $(\operatorname{grad} p)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

F. $(\operatorname{grad} q)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

G. $F(\mathbf{x}) = 0$

H. $p(\mathbf{x}) = 0$

I. $p(\mathbf{x}) \leq 0$

J. $\lambda p(\mathbf{x}) = 0$

K. $q(\mathbf{x}) \leq 0$

L. $\lambda q(\mathbf{x}) \leq 0$ NE!

Pri vsaki od nalog 5.-9. dobro utemeljite vse svoje odgovore in korake pri sklepanju. Za odgovore brez utemeljitev ne boste prejeli točk.

5. (10 točk) Ali je množica

$$\mathcal{U} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^2 = 0\}$$

vektorski prostor?

NE. $n = 2$

$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_1^2 = 0$

$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2^2 = 0$

$A := A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. (20 točk) Naj bosta $A \in \mathbb{R}^{10\times 3}$ in $B \in \mathbb{R}^{10\times 3}$.

A. Denimo, da sta $A = U_A \Sigma V_A^\mathsf{T}$ in $B = U_B \Sigma V_B^\mathsf{T}$ razcepa singularnih vrednosti matrik A in B, pri čemer sta matriki Σ v razcepih enaki. Zapišite razcep singularnih vrednosti matrike $A \otimes B$.

$$A \otimes B = (U_A \Sigma V_A^T) \otimes (U_B \Sigma V_B^T) =$$

$$= \underbrace{(U_A \otimes U_B)}_{\text{ortogonalna}} \underbrace{(\Sigma \otimes \Sigma)}_{\text{"diagonalna"}} \underbrace{(V_A^T \otimes V_B^T)}_{= (V_A \otimes V_B)^T \text{ ortogonalna}} \leftarrow \text{SVD"}$$

B. Če imata obe matriki A in B singularne vrednosti 5, 3, $\sqrt{2}$, zapišite vse singularne vrednosti matrike $A \otimes B$.

sing. vrednosti na diagonali $\Sigma \otimes \Sigma =$

$$= \begin{array}{cc} & 3 \\ 10 & \begin{bmatrix} 5 & & \\ & 3 & \\ & & \sqrt{2} \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \end{array} \otimes \begin{array}{cc} & 3 \\ 10 & \begin{bmatrix} 5 & & \\ & 3 & \\ & & \sqrt{2} \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & 9 \\ 100 & \begin{bmatrix} 25 & & & & & & & & \\ & 15 & & & & & & & \\ & & 5\sqrt{2} & & & & & & \\ & & & 15 & & & & & \\ & & & & 9 & & & & \\ & & & & & 3\sqrt{2} & & & \\ & & & & & & 5\sqrt{2} & & \\ & & & & & & & 3\sqrt{2} & \\ & & & & & & & & 2 \\ & & & & & & & & \vdots \end{bmatrix} \end{array}$$

sing. vr: $25, 15, 15, 9, 5\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 2$

7. (10 točk) Naj bo matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična in pozitivno definitna ter naj bo matrika $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva. Pokažite, da je tudi matrika $B^\mathsf{T} AB$ simetrična in pozitivno definitna.

$(B^TAB)^T = B^TA^TB = B^TAB \Rightarrow$ simetrična

$\vec{x}^T (B^TAB)\vec{x} = (\vec{x}^T B^T) A (B\vec{x}) =$

$= (B\vec{x})^T A (B\vec{x}) = \vec{y}^T A \vec{y} > 0$ za $\vec{y} \neq 0$, saj A PD.

$\vec{y} := B\vec{x}$

8. (10 točk) Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{7\times 7}$$

in definirajmo funkcijo $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(\vec{x}) = \vec{x}^{\mathsf{T}} A \vec{x}.$$

Ali je funkcija f konveksna? Svoj odgovor dobro utemeljite.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = \vec{x}^{\mathsf{T}}(A + A^{\mathsf{T}}).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{x}^2} = \frac{\partial}{\partial \vec{x}}\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}\right)^{\mathsf{T}} = \frac{\partial}{\partial \vec{x}}\left((A + A^{\mathsf{T}})\vec{x}\right) = A + A^{\mathsf{T}} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & & & 0 \\ & 4 & & \\ & & 6 \ddots & \\ 0 & & & 14 \end{bmatrix},$$ ki ima vse l. vr. na diagonali $2, 4, \ldots, 14$ in zato PD.

$\Rightarrow f$ konveksna

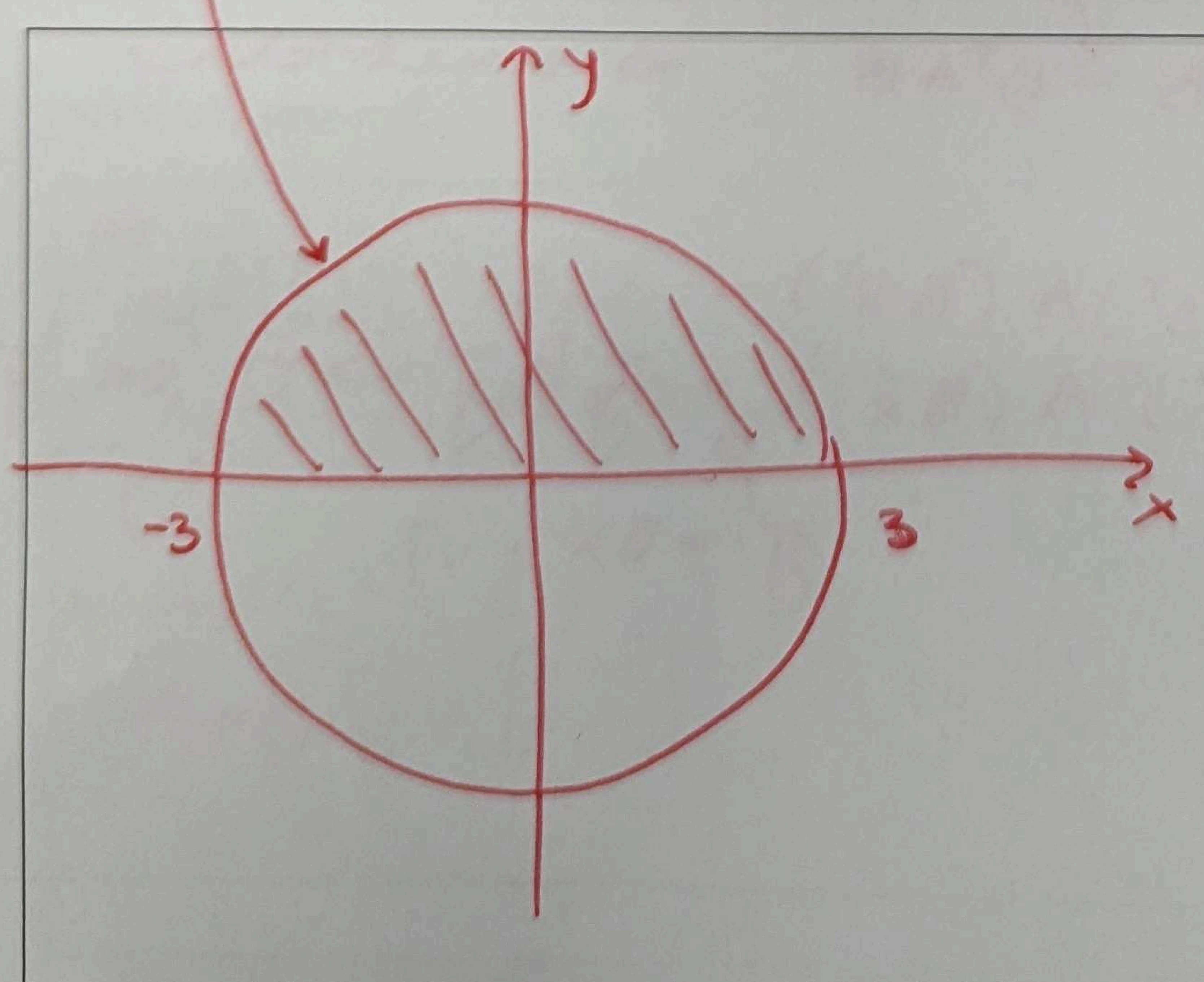
9. (20 točk) Zapišite dvakratni integral

$y = \sqrt{9 - x^2} > 0$

$y^2 + x^2 = 9$

$$\int_{-3}^{3}\left(\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} xy \, dy\right) dx = \int_{\boxed{0}}^{\boxed{\pi}}\left(\int_{\boxed{0}}^{\boxed{3}} \boxed{r^3 \cos\varphi \sin\varphi} \, d\boxed{r}\right) d\boxed{\varphi}$$

v polarnih koordinatah. Izpolnite vseh sedem pravokotnikov, a integrala ne računajte. Spodaj narišite sliko in utemeljite vse korake.



$x = r\cos\varphi$

$y = r\cos\varphi$

$J_{polar} = r$