Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

3. Računski izpit iz Matematike 1

29. avgust 2024

Čas pisanja: **90 minut**. *Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 za pomoč. Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, pametnega telefona in ostalih elektronskih naprav je* **strogo** *prepovedano.*

1. naloga (25 točk)

Naj bo $A \in \mathbb{R}^4$ *simetrična* matrika, ki ima lastni vektor $\mathbf{v}_1 = [1,0,0,1]^\mathsf{T}$ pri lastni vrednosti $\lambda_1 = 0$, lastni vektor $\mathbf{v}_2 = [0,1,1,0]^\mathsf{T}$ pri lastni vrednosti $\lambda_2 = 1$ ter dvakratno lastno vrednost $\lambda_{3,4} = -2$.

a) (15 točk) Določi matriko A.

b) (10 točk) Poišči vsaj eno matriko A_1 ranga 1, ki minimizira $\|A - A_1\|_\mathrm{F}$. Koliko je $\|A - A_1\|_\mathrm{F}$ v tem primeru?

2. naloga (25 točk)

Naj bo $V \subseteq \mathbb{R}^{3\times 3}$ vektorski podprostor vseh 3×3 simetričnih matrik z ničelno diagonalo, t.j. vsaka matrika $A \in V$ je oblike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & e & f \\ e & 0 & g \\ f & g & 0 \end{bmatrix}$$

za $e, f, g \in \mathbb{R}$. Označimo še

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ter } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix}.$$

Definirajmo preslikavi $\phi, \psi\colon V \to \mathbb{R}_2[x]$ s predpisoma

$$\phi(A) = \mathbf{a}^\mathsf{T} A \mathbf{u} \text{ in } \psi(A) = \frac{1}{x}\left(\mathbf{u}^\mathsf{T} A \mathbf{u}\right).$$

a) (5 točk) Poišči bazo B_V za vektorski prostor V.

b) (10 točk) Ali je katera od preslikav ϕ in ψ linearna? Katera? Zakaj oz. zakaj ne? *Natančno utemelji!*

c) (10 točk) Za vsako linearno preslikavo (izmed ϕ in ψ) poišči matriko, ki ji pripada glede na bazo B_V ter standardno bazo prostora $\mathbb{R}_2[x]$.

3. naloga (25 točk)

Krogelni izsek $T \subseteq \mathbb{R}^3$ je dan z neenačbami

$$x^2 + y^2 \leq 3z^2\ ,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\ ,\ z \geq 0.$$

a) (15 točk) Izračunaj prostornino telesa T.

b) (10 točk) Izračunaj še z–koordinato masnega središča telesa T, če je telo T homogeno, t.j. $\rho(x, y, z) = 1$.

4. naloga (25 točk)

Poišči največjo in najmanjšo vrednost, ki jo funkcija s predpisom

$$f(x,y,z) = x - y + z$$

zavzame na območju $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0 \text{ in } x^2 + y^2 + z^2 \leq 6\}$.