Ime in priimek | Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. Računski izpit iz Matematike 1

31. januar 2025

Čas pisanja: **90 minut**. *Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 za pomoč. Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, pametnega telefona in ostalih elektronskih naprav je* **strogo** *prepovedano.*

1. naloga (25 točk)

Naj bo A matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

a) (5 točk) Ali je matrika A pozitivno definitna? Ali obstaja razcep Choleskega za matriko A? Če obstaja, ga poišči.

b) (20 točk) Poišči pozitivno semidefinitno, vendar ne strogo definitno, matriko A', ki je v Frobeniusovi normi najbližja matriki A.

(a) Uporabimo Sylvestrov kriterij:

$1 > 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8 < 0$ ... A ni pozitivno definitna in zato nima razcepa Choleskega.

(b) Poiščimo singularne vrednosti A oz. kar lastne vrednosti A (saj je A simetrična).

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & -1 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 & -1 \\ 2+\lambda & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-2-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = (-2-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-6) = 0$$

lastne vrednosti $\longrightarrow$ $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 6$

A' bo ranga 2, največji singularni vrednosti A sta $\sigma_2 = \lambda_2 = 3$ in $\sigma_3 = \lambda_3 = 6$. Poiščimo pripadajoče singularne/lastne vektorje:

• $\lambda_2 = 3$: $A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} +1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad x - z = 0,\ y - z = 0$ $\quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ... $\vec{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

• $\lambda_3 = 6$: $A - 6I = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad x + \frac{1}{2}z = 0,\ y + \frac{1}{2}z = 0$ $\quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{q}_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Po Eckart-Youngovem izreku je:

$$A' = 3\vec{q}_2\vec{q}_2^{\,T} + 6\vec{q}_3\vec{q}_3^{\,T} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 11 & 11 & -1 \\ 11 & 11 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. naloga (25 točk)

Naj bo $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \{[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}]\}$ standardna baza $\mathbb{R}^2$. Preslikava $\phi\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}_2[x]$ je dana s predpisom

$$(\phi(A))(x) = (\mathbf{e}_1^\mathsf{T} A \mathbf{e}_1)x^2 + (\mathbf{e}_2^\mathsf{T} A \mathbf{e}_2)x + (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)^\mathsf{T} A (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2).$$

a) (15 točk) Prepričaj se, da je ϕ linearna preslikava in poišči matriko, ki pripada ϕ glede na standardni bazi prostorov $\mathbb{R}^{2\times 2}$ in $\mathbb{R}_2[x]$.

b) (10 točk) Poišči bazi za jedro in sliko preslikave ϕ.

(a) Zapišemo lahko

$$(\phi(A))(x) = \left(x^2\vec{e}_1 + x\vec{e}_2 + \vec{e}_1 + \vec{e}_2\right)^\mathsf{T} A \underbrace{\left(x^2\vec{e}_1 + x\vec{e}_2 + \vec{e}_1 + \vec{e}_2\right)}_{\vec{a}} = \vec{a}^\mathsf{T} A \vec{a}.$$

Velja: $(\phi(\alpha A + \beta B))(x) = \vec{a}^\mathsf{T}(\alpha A + \beta B)\vec{a} = \alpha\,\vec{a}^\mathsf{T} A \vec{a} + \beta\,\vec{a}^\mathsf{T} B \vec{a} =$

$= \alpha(\phi(A))(x) + \beta(\phi(B))(x),$

tj. ϕ je linearna.

Poračunamo:

$\phi(E_{11}) = x^2 + 1$,

$\phi(E_{12}) = 1$,

$\phi(E_{21}) = 1$,

$\phi(E_{22}) = x + 1$.

Torej
$$A_\phi = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} E_{11} & E_{12} & E_{21} & E_{22} \\ \end{array}$$
$$A_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array}$$

(b) Ker je rang $A_\phi = 3$, je $\dim(\operatorname{im}\phi) = 3$, torej $\operatorname{im}\phi = \mathbb{R}_2[x]$ in zato $B_{\operatorname{im}\phi} = \{1, x, x^2\}$.

$A_\phi \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, tj. v $N(A_\phi)$ so vektorji oblike $\begin{bmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix}$,

kar pomeni $-x_3E_{12} + x_3E_{21} \in \ker\phi$. $B_{\ker\phi} = \{-E_{12} + E_{21}\}$.

3. naloga (25 točk)

Izračunaj prostornino območja $D \subset \mathbb{R}^3$ danega z neenačbami

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 2, z \ge x^2 + y^2\}.$$

V valjnih koordinatah $\begin{pmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{pmatrix}$ dobimo neenakosti:

$$\underline{r^2 + z^2 \le 2 \quad \text{in} \quad z \ge r^2} \quad \ldots \quad \underbrace{r^2 \le z \le \sqrt{2-r^2}}_{\text{Meje za integracijo po } z.}.$$

Iz $r^2 \le \sqrt{2-r^2}$ dobimo še $r^4 \le 2 - r^2 \ldots r^4 + r^2 - 2 \le 0 \ldots$

$\ldots r^2 = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \ldots r^2 = 1 \ldots r = 1.$

Zgornja meja za r.

Ker v neenakostih ni pogoja za φ, je $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Dobimo:

$$V = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} r \cdot dz \right) dr \right) d\varphi = 2\pi \int_0^1 r \left(\sqrt{2-r^2} - r^2 \right) dr =$$

$\det(J_{\vec{F}})$

$$= 2\pi \left(\underbrace{\int_0^1 r\sqrt{2-r^2}\, dr}_{} - \underbrace{\int_0^1 r^3 dr}_{\frac{r^4}{4}\Big|_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{4}} \right) = \pi \left(\frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{7}{6} \right).$$

$$= -\frac{1}{2} \int_2^1 \sqrt{t}\, dt = \frac{1}{2} \left. \frac{t^{3/2}}{3/2} \right|_{t=1}^{t=2} = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$$

$t = 2 - r^2$

$dt = -2r\, dr \ldots r\, dr = -\dfrac{dt}{2}$

4. naloga (25 točk)

Naj bosta dana vektorja $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ter pozitivno definitna matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Izrazi največjo in najmanjšo vrednost funkcije

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x}$$

pri pogojih

$$\mathbf{x}^\mathsf{T} A^{-1}\mathbf{x} = 1 \ \text{ in } \ \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{x} = 0.$$

Pripadajoča Lagrangeova funkcija je:

$$L(\vec{x},\lambda,\mu) = \vec{a}^T\vec{x} - \lambda(\vec{x}^T A^{-1}\vec{x} - 1) - \mu\vec{b}^T\vec{x}.$$

saj je A^{-1} tudi simetrična

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = \boxed{\begin{aligned} \vec{a}^T - 2\lambda\vec{x}^T A^{-1} - \mu\vec{b}^T &= \vec{0}^T \\ \vec{x}^T A^{-1}\vec{x} &= 1 \\ \vec{b}^T\vec{x} &= 0 \end{aligned}}$$

rešiti moramo ta sistem.

$$2\lambda A^{-1}\vec{x} = \vec{a} - \mu\vec{b} \quad \ldots \quad \vec{x} = \frac{1}{2\lambda} A(\vec{a} - \mu\vec{b}) \quad \ldots \quad \vec{b}^T\vec{x} = \frac{1}{2\lambda}\vec{b}^T A(\vec{a} - \mu\vec{b}) = 0$$

če $\lambda \neq 0$

$$\ldots \quad \vec{b}^T A\vec{a} - \mu\vec{b}^T A\vec{b} = 0$$

$$\ldots \quad \mu = \frac{\vec{b}^T A\vec{a}}{\vec{b}^T A\vec{b}}$$

$$\ldots \quad (\vec{a} - \mu\vec{b})^T A(\vec{a} - \mu\vec{b}) = 4\lambda^2 \ \ldots$$

$$\ldots \quad \vec{a}^T A\vec{a} \underbrace{- 2\mu\vec{b}^T A\vec{a}}_{\text{ker je } A \text{ simetrična}} + \mu^2\vec{b}^T A\vec{b} = 4\lambda^2$$

$$\ldots \quad \vec{a}^T A\vec{a} - 2\frac{(\vec{b}^T A\vec{a})^2}{\vec{b}^T A\vec{b}} + \frac{(\vec{b}^T A\vec{a})^2}{\vec{b}^T A\vec{b}} = 4\lambda^2$$

$$\ldots \quad \lambda = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\vec{a}^T A\vec{a} - \frac{(\vec{b}^T A\vec{a})^2}{\vec{b}^T A\vec{b}}}$$

$$f(\vec{x}) = \vec{a}^T\vec{x} = \pm\frac{\vec{a}^T A\vec{a} - \frac{(\vec{b}^T A\vec{a})^2}{\vec{b}^T A\vec{b}}}{\sqrt{\vec{a}^T A\vec{a} - \frac{(\vec{b}^T A\vec{a})^2}{\vec{b}^T A\vec{b}}}} = \pm\sqrt{\vec{a}^T A\vec{a} - \frac{(\vec{b}^T A\vec{a})^2}{\vec{b}^T A\vec{b}}}$$

največja in najmanjša vrednost.