1. Naj bo $\delta\colon \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ operator odvajanja, $\delta(p) = p'$. Določi $\ker\delta$. Prepričaj se, da je $\ker\delta$ edini lastni podprostor za δ. (Kateri lastni vrednosti pripada?)
Rešitev: $\mathcal{B}_{\ker\ \delta} = \{1\}$, $\ker\delta$ je lastni podprostor za lastno vrednost 0.

2. Za $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ je preslikava $\tau\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ je podana s predpisom

$$\tau(X) = AX - XA.$$

(a) Pokaži, da je τ linearna preslikava.
(b) Določi njeno matriko v standardni bazi $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ prostora $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
(c) Določi dimenzijo jedra preslikave τ.
(d) Ali lahko τ diagonaliziramo?

Rešitev:

(a) Za $X, Y \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ velja

$$\begin{aligned}\tau(\alpha X + \beta Y) &= A(\alpha X + \beta Y) - (\alpha X + \beta Y)A = \alpha(AX - XA) + \beta(AY - YA)\\ &= \alpha\,\tau(X) + \beta\,\tau(Y),\end{aligned}$$

torej je τ linearna.

(b) Poračunamo

$$\begin{aligned}\tau(E_{11}) &= \tau\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -E_{12},\\ \tau(E_{12}) &= \tau\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0,\\ \tau(E_{21}) &= \tau\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = E_{11} - E_{22},\\ \tau(E_{22}) &= \tau\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = E_{12},\end{aligned}$$

zato je matrika A_τ, ki pripada preslikavi τ, enaka

$$A_\tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Očitno je rang matrike A_τ enak 2, zato je $\dim(\ker\tau) = 4 - \dim(\operatorname{im}\tau) = 2$.

(d) Najprej poračunamo lastne vrednosti preslikave τ. Karakteristični polinom matrike A_τ je enak

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4,$$

zato je 0 edina lastna vrednost. Ker smo v točki (c) izračunali, da imamo pri lastni vrednosti 0 le dva linearno neodvisna lastna vektorja, sledi, da preslikava τ ni diagonalizabilna.

3. Dani so linearno neodvisni polinomi $p, q, r \in \mathbb{R}_2[x]$;

$$p(x) = 1 + x^2, \quad q(x) = 1 - x^2, \quad r(x) = 2 + x.$$

(a) Naj bo $\tau\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ linearna preslikava, za katero velja

$$\tau(p) = q, \quad \tau(q) = p, \quad \tau(r) = -2r.$$

Ali obstaja baza za $\mathbb{R}_2[x]$, v kateri pripada τ diagonalna matrika? Če obstaja, jo določi!

(b) Naj bo $\phi\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ še ena linearna preslikava, da je

$$\phi(p) = -p, \quad \phi(q) = q, \quad \phi(q) = q + r.$$

$$\phi(p) = q, \quad \phi(q) = p, \quad \phi(r) = p + q + r.$$

Ali obstaja baza za $\mathbb{R}_2[x]$, v kateri pripada ϕ diagonalna matrika? Če obstaja, jo določi!

Rešitev: (a) V bazi $\{p, q, r\}$ pripada τ matrika $A_\tau = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Karakteristični polinom te matrike je $\det(A_\tau - \lambda I) = -(\lambda^2 - 1)(\lambda + 2)$, zato so lastne vrednosti $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ in $\lambda_3 = 1$. Ker ima τ tri različne lastne vrednosti, ima tudi (vsaj) tri linearno neodvisne lastne polinome. Obstaja torej baza $\mathbb{R}_2[x]$ iz lastnih polinomov τ, kar pomeni, da τ lahko diagonaliziramo.
(b) V bazi $\{p, q, r\}$ pripada ϕ matrika $A_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Lastne vrednosti te matrike (in preslikave ϕ) so $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_{2,3} = 1$. Lastni podprostor, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_{2,3} = 1$, je 1-razsežen (Preveri to!), zato ϕ ni mogoče diagonalizirati.

4. Naj bo V vektorski prostor, $\psi\colon V \to V$ pa linearna preslikava, da velja $\psi^2 = \mathrm{id}_V$.

(a) Dokaži, da sta edini lastni vrednosti ψ le -1 in 1.

(b) Kakšen je geometrijski pomen ψ, če je $V = \mathbb{R}^n$, tj. $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $A_\psi^2 = I$?

(c) Naj bo $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zrcaljenje preko ravnine z enačbo $x + y + z = 0$. Poišči matriko, ki pripada ψ v standardni bazi $\mathbb{R}^3$.

(d) Poišči formulo za matriko zrcaljena preko ravnine skozi 0 z normalo $\mathbf{n}$.

Rešitev:

(a) Iz $\psi(\psi(v)) = v$ za lastni vektor v sledi $\lambda^2 v = v$. Ker $v \neq 0$, mora veljati $\lambda^2 = 1$ ali $\lambda = \pm 1$.

(b) 'Poševno' zrcaljenje preko lastnega podprostora za lastno vrednost 1 vzdolž lastnega podprostora za lastno vrednost -1.

(c) $A_\psi = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) $H = I - 2\frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T}}{\mathbf{n}^\mathsf{T}\mathbf{n}}$.

5. Naj bo $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ poljubna kvadratna matrika, $\tau\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ pa linearna preslikava s predpisom $\tau(X) = TX$.

   (a) Preveri, da imata τ in T enake lastne vrednosti.

   (b) Preveri, da lahko τ diagonaliziramo, če lahko diagonaliziramo T.

   (c) Kaj so lastni vektorji (matrike) za τ, če poznaš lastne vektorje za T?

   (d) Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje za τ, če je $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   Rešitev: (d) Lastni vrednosti $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Lastni vektorji/matrike: $X_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ in $X_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ k lastni vrednost $\lambda_1 = 1$, $X_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ in $X_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ k lastni vrednost $\lambda_2 = -1$.

6. Naj bo $C^\infty(U)$ vektorski prostor vseh funkcij $f\colon U \to \mathbb{R}$ na odprtem intervalu $U \subseteq \mathbb{R}$, ki imajo odvode poljubnih redov. Kaj so lastne vrednosti in kaj pripadajoče lastne funkcije operatorja odvajanja $\delta\colon C^\infty(U) \to C^\infty(U)$, $\delta(f) = f'$?

   Rešitev: Za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$ ima diferencialna enačba $f' = \lambda f$ splošno rešitev $f(x) = Ce^{\lambda x}$. Vsako realno (celo kompleksno) število λ je torej lastna vrednost s pripadajočo lastno funkcijo $e^{\lambda x}$.

7. *Primer linearne preslikave brez lastnih vektorjev:* Naj bo $\mathbb{R}[x]$ prostor polinomov v spremenljivki x poljubnih stopenj. Definiramo linearno preslikavo $\sigma\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ s predpisom $(\sigma(p))(x) = x\,p(x)$. Prepričaj se, da σ *nima* lastnih polinomov! (Dve podnalogi: Prepričaj se, da je σ res linearna. Poišči bazo za $\mathbb{R}[x]$.)

   Rešitev: Lastni polinomi za σ so neničelni polinomi p, za katere velja $(\sigma(p))(x) = \lambda\,p(x)$ oziroma $x\,p(x) = \lambda\,p(x)$, tj. nek večkratnik polinoma p naj bi bil polinom stopnje, ki je za 1 večja kot je stopnja polinoma p. Jasno je, da to ne velja za noben neničeln polinom in σ *nima* lastnih polinomov. (Ena možna baza za $\mathbb{R}[x]$ je števno neskončna množica $\mathcal{B}_{\mathbb{R}[x]} = \{1, x, x^2, \ldots\}$.)

8. *Še en primer linearne preslikave brez lastnih vektorjev:* Naj bo $C(\mathbb{R})$ prostor vseh zveznih funkcij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\eta\colon C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ pa linearna preslikava s predpisom

$$(\eta(f))(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

   Prepričaj se, da η *nima* lastnih funkcij.
   (Ena podnaloga: Prepričaj se, da je η res linearna. Ne išči baze za $C(\mathbb{R})$.)
   Rešitev: Lastna funkcija za η je neničelna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katero velja

$$\lambda f(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

   Najprej opazimo, da je f odvedljiva, še več: $\lambda f'(x) = f(x)$. Primer $\lambda = 0$ torej odpade, saj je f neničelna, za $\lambda \neq 0$ pa je splošna rešitev te diferencialne enačbe $f(x) = Ce^{x/\lambda}$. Pri $x = 0$ mora veljati

$$\lambda f(0) = \lambda \cdot C = \int_0^0 f(t)\,dt = 0,$$

   torej $C = 0$ in $f(x) = 0$, to pa je spet ničelna funkcija. Tudi η *nima* lastnih funkcij.
   (Linearnost η je lahko preveriti. Obstoj baze za $C(\mathbb{R})$ je posledica aksioma izbire, zato te baze ni mogoče eksplicitno zapisati.)

?
$\boxed{3}$ $\phi: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$

$$(\phi(p))(x) = (xp(x+1))' - 2p(x)$$

a) ϕ linearna

$p, q \in \mathbb{R}_2[x]$

$$(\phi(\alpha p + \beta q))(x) = (x(\alpha p + \beta q)(x+1))' - 2(\alpha p + \beta q)(x) =$$

$$= (x(\alpha p(x+1) + \beta q(x+1)))' - (2\alpha p(x) + 2\alpha q(x)) =$$

$$= \alpha((x\,p(x+1))' - 2p(x)) + \beta((xq(x-1))' - 2q(x)) =$$

$$= \alpha\phi(p)(x) + \beta\phi(q)(x)$$

b) Zapišimo matriko

$$\phi(1)(x) = (x \cdot 1)' - 2 = -1$$

$$\phi(x)(x) = (x(x+1))' - 2x = 2x + 1 - 2x = 1$$

$$\phi(x^2)(x) = (x(x+1)^2)' - 2x^2 = (x^3 + 2x^2 + x)' - 2x^2 = x^2 + 4x + 1$$

$$A_{\phi, S, S} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \phi(1) & \phi(x) & \phi(x^2) \end{array} & \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \end{array}$$

Izračunaj $\ker\phi$!

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Baza za jedro: $\{x+1\}$

Baza za stolpni prostor: $\{1, 1 + 4x + x^2\}$

[?] $a=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ $b=\begin{bmatrix}1\\ \\1\end{bmatrix}$ $c=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

$\tau:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ linearna preslikava

$\tau(a)=a$

$\tau(b)=a+b$

$\tau(c)=a+c$

Natančno določena s slikami baznih vektorjev.

a) Pokažimo, da je $B=\{a,b,c\}$ res baza za $\mathbb{R}^3$.

Def: $a,b,c\in\mathbb{R}^3$ so lin. neodv., če iz

$x\cdot a+y\cdot b+z\cdot c=0 \Leftrightarrow x=y=z=0$.

$$\overset{P}{\begin{bmatrix}a & b & c\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

stolpci

$N(P)=\{0\}$

$P=\begin{bmatrix}a & b & c\end{bmatrix} \overset{\text{GAUSS}}{\rightsquigarrow}$ Če je P polnega ranga, so vektorji v B lin. neodvisni

(I moramo dobiti)

b) Zapišimo matriko, ki predstavlja τ v bazi B.

$$A_{\tau,B,B}=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\tau(a) & \tau(b) & \tau(c)\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}a\\b\\c\end{array}$$

c) Zapišimo matriko, ki predstavlja τ v bazi $\mathcal{S}=\{e_1,e_2,e_3\}$

$\tau(e_1)=\tau\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\overset{\text{ker je } \tau \text{ lin.}}{=}\frac{1}{2}(\tau(a)+\tau(b)-\tau(c))$

$=\frac{1}{2}(a+a+b-a-c)=\frac{1}{2}(a+b-c)=e_1$

$\tau(e_2)=\tau\left(\frac{a+c-b}{2}\right)=\frac{1}{2}(\tau(a)+\tau(c)-\tau(b))=$

$=\frac{1}{2}(a+a+c-a-b)=\frac{1}{2}(a+c-b)=e_2$

$\tau(e_3)=\tau\left(\frac{b+c-a}{2}\right)=\frac{1}{2}(\tau(b)+\tau(c)-\tau(a))=$

$=\frac{1}{2}(a+b+a+c-a)=\frac{1}{2}(a+b+c)=e_1+e_2+e_3$

$$B=\begin{array}{c}e_1\\e_2\\e_3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\tau(e_1) & \tau(e_2) & \tau(e_3)\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

Kako izrazimo $v\in\mathbb{R}^3$ v bazi $\{a,b,c\}$?

Poiskati moramo kakšne $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, da bo veljalo

$xa+yb+zc=v$

$$\begin{bmatrix}a & b & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}=v$$

$\Rightarrow$ rešiti moramo enačbe $P\vec{x}_1=e_1$

$P x_2=e_2$

$P x_3=e_3$

$$\left[P \mid e_1\, e_2\, e_3\right]\overset{GE}{\rightsquigarrow}\left[I \mid P^{-1}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\sim \dots \sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2\\0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2\\0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2\end{array}\right]$$

$e_1=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c$

$\vdots$

koeficienti

$$\begin{tikzcd}
\tau: \underset{\{abc\}}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift right, "P"'] & \underset{\{abc\}}{\mathbb{R}^3} \arrow[d, shift left, "P"] \\
\underset{\{e_1 e_2 e_3\}}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "B"] \arrow[u, shift right, "P^{-1}"'] & \underset{\{e_1 e_2 e_3\}}{\mathbb{R}^3} \arrow[u, shift left, "P^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

$P=\begin{bmatrix}a & b & c\end{bmatrix}$

$B=PAP^{-1}$

$\boxed{7}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$p(A) = aA^3 + bA^2 + cA + dI$

$\phi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$

$\phi(p) := p(A)$

a) ϕ linearna

$$\phi(\alpha p + \beta q) = (\alpha p + \beta q)(A) = \alpha p(A) + \beta q(A) =$$

$$= \alpha \phi(p) + \beta \phi(q) \quad \checkmark$$

b) Zapišimo matriko ϕ ja v std. bazah.

$\phi(x \mapsto 1) = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\phi(x \mapsto x) = A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\phi(x \mapsto x^2) = A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$\phi(x \mapsto x^3) = A^3 = \begin{bmatrix} 13 & 14 \\ 14 & 13 \end{bmatrix}$

$$M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \phi(1) & \phi(x) & \phi(x^2) & \phi(x^3) \end{array} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 13 \\ 0 & 2 & 4 & 14 \\ 0 & 2 & 4 & 14 \\ 1 & 1 & 5 & 13 \end{bmatrix} \begin{array}{c} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{array} \end{array}$$

c) Jedro in image

$$M \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} d & c & b & a \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

za jedro

$d + 3b + 6a = 0$

$c + 2b + 7a = 0$

$$v_1 = \begin{array}{c} d \\ c \\ b \\ a \end{array} \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

koeficienti polinoma

$v_1 \leftrightarrow x^2 - 2x - 3$ $\quad v_2 \leftrightarrow x^3 - 7x - 6$

$= (x+1)(x-3)$

Baza za $\ker\phi$: $\{x^2 - 2x - 3,\ x^3 - 7x - 6\}$

Premislimo:

$\ker\phi = \{p : \phi(p) = 0\}$

$p(A) = 0$

recimo, da imamo $A = PDP^{-1}$

$$p(A) = P(aD^3 + bD^2 + cD + dI)P^{-1}$$

$$= P\begin{bmatrix} a\lambda_1^3 + b\lambda_1^2 + c\lambda_1 + d & & \\ & \ddots & \\ & & a\lambda_n^3 + b\lambda_n^2 + c\lambda_n + d \end{bmatrix}P^{-1} =$$

$$= P\begin{bmatrix} p(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p(\lambda_n) \end{bmatrix}P^{-1} = 0$$ rešujemo enačbo

$$\begin{bmatrix} \ddots \end{bmatrix} = P^{-1} 0 P = 0$$

$$\begin{bmatrix} \ddots \end{bmatrix} = 0 \iff p(\lambda_i) = 0 \text{ za } \forall i$$

$\downarrow$

tak polinom je determinističen polinom

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(3-\lambda)$$

$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 3$

$p \in \ker\phi \iff -1$ in 3 sta ničli p-ja

$p(x) = (x+1)(x-3)(Cx+D)$

C in D poljubna

$q_1(x) = (x+1)(x-3)(1)$

$q_2(x) = (x+1)(x-3)x$

Baza za $\operatorname{im}\phi = \{I, A\}$ (ker baza za $C(M)$

$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\boxed{2}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\tau : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$

$\tau(X) = AX - XA$

a) Preveri, da je τ linearna.

$$\tau(\alpha X + \beta Y) = A(\alpha X + \beta Y) - (\alpha X + \beta Y)A = \alpha(AX - XA) + \beta(AY - YA)$$

b) Določi matriko τ v std. bazi.

$$\tau(E_{11}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau(E_{12}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau(E_{21}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\tau(E_{22}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \tau(E_{11}) & \tau(E_{12}) & \tau(E_{21}) & \tau(E_{22}) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{array}$$

c) ~~Jedro?~~

$A = PBP^{-1}$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(PBP^{-1} - \lambda PP^{-1})$$
$$= \det(P(B - \lambda I)P^{-1}) =$$
$$= \cancel{\det(P)}\det(B - \lambda I)\cancel{\det(P^{-1})} =$$
$$= \det(B - \lambda I) = p_B(\lambda)$$

– karakteristični polinom

$$\det(M - \lambda I) = \left| \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4$$

$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = \det(A)\det(C)$

Ali se da diagonalizirati?

$\lambda_{1,2,3,4} = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dim(\ker(M - 0\cdot I)) = 2$$

5) $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\tau : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}^{n \times n}$

$\tau(X) = T \cdot X$

a) Pokaži, da imata T in τ enake l. vrednosti.

če λ l.vr. T, je λ l.vr. τ.

$$X = \left[X_1, \dots, X_n \right] \quad T \cdot X = T \cdot \left[X_1, \dots, X_n \right] = \left[TX_1, \dots, TX_n \right]$$

Recimo, da imamo $Tv = \lambda v$

$$\Rightarrow T \left[v, \dots, v \right] = \left[Tv, \dots, Tv \right] = \left[\lambda v, \dots, \lambda v \right] =$$

$$= \lambda \left[v, \dots, v \right] \Rightarrow \left[v, \dots, v \right] \text{ je l. "vektor" za } \tau \text{ za l.vr. } \lambda.$$

b) Če lahko diag. T, lahko tudi τ.

Za vsak l. vektor v matriki T lahko sestavimo n neodvisnih lastnih vektorjev l. preslikave τ:

$$[v, 0, \dots, 0], [0, v, 0, \dots, 0], [0, \dots, 0, v].$$

Če imamo bazo lastnih vektorjev matrike T z l. vrednostmi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (λ niso nujno različni), lahko zapišemo $n \times n$ neodvisnih "l. vektorjev" τ:

$$\begin{matrix} [v_1, \dots, 0] & \dots & [0, \dots, v_1] \\ [v_2, \dots, 0] & \dots & [0, \dots, v_2] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [v_n, \dots, 0] & \dots & [0, \dots, v_n] \end{matrix}$$

$\Rightarrow \tau$ lahko diagonaliziramo

(3) $\mathbb{R}[x]$

baza $\{1, x, x^2, \ldots\}$ neskončno dim. prostor

$\delta(p) = p'$ preslikava $\delta: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$

Kakšne so lastne vrednosti?

$\delta(p) = \lambda p$?

$p' = \lambda p \Rightarrow p(x) = 1$

$\lambda = 0$

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots$

$p'(x) = \qquad a_n x^{n-1} + \ldots$

$\lambda p'(x) = \lambda a_n x^n + \lambda a_{n-1} x^{n-1} + \ldots$

$\lambda a_n = 0 \Rightarrow a_n = 0$ ali $\lambda = 0$

$C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ prostor neskončno odvedljivih funkc. (2)

$\delta(f) = f'$

$f' = \lambda f \Rightarrow f(x) = e^{\lambda x}$ je "l. vektor" za $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\in \mathbb{C}$

$L(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$

$L(f) = \lambda f$?

$g(x) = \int_0^x f(t)dt = \lambda f(x) \quad /'$

$g(0) = 0$

$f(x) = \lambda f'(x)$

$\Rightarrow f(x) = ce^{\lambda x}$

za $g(x) = \int_0^x f(t)dt$

velja $g(0) = 0$

Ker imamo $g(x) = \lambda f(x)$

$\Rightarrow 0 = \lambda f(0)$

1. $\lambda = 0$: $L(f) = 0$

$\int_0^x f(t)dt = 0$ za $\forall x$

$\Rightarrow f(t) = 0$ za $\forall t$

// ker 0 ne more biti l. vekt.

2. $f(0) = 0$

$f(x) = c \cdot e^{\lambda x} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

$\Rightarrow f(x) = 0$ // isto kot ↑

Torej nobena taka funkcija ne more biti l. vekt.