1. Katere podmnožice v vektorskem prostoru $\mathbb{R}^{n\times n}$ – vseh realnih $n \times n$ matrik – so vektorski podprostori? Za tiste, ki so podprostori določi tudi dimenzijo!

   (a) Vse matrike, ki imajo na mestu $(2,1)$ element 0.

   (b) Vse matrike, ki imajo na izbranem mestu $(2,1)$ element 1.

   (c) Vse matrike s celimi elementi, tj. $A = [a_{ij}]$, kjer so $a_{ij} \in \mathbb{Z}$.

   (d) Vse zgornje-trikotne matrike.

   (e) Vse simetrične matrike; $A = A^{\mathsf{T}}$.

   (f) Vse antisimetrične matrike; $A = -A^{\mathsf{T}}$.

   (g) Vse obrnljive matrike; podmnožica $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$.

   (h) Vse matrike z determinanto 0, tj. $\mathbb{R}^{n\times n} \setminus \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

   (i) Vse nilpotentne matrike, tj. matrike $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ z lastnostjo $N^n = 0$.

   (j) Vse zgornje-trikotne nilpotentne matrike. *(Namig: Kaj je na diagonali zgornje-trikotne nilpotentne matrike?)*

   (k) Vse matrike s sledjo 0.

   Rešitev: (a) Da, $\dim = n^2 - 1$. (b) Ne, saj ne vsebuje ničelne matrike. (c) Ne, saj ni zaprt za množenje s skalarjem. (d) Da, $\dim = \frac{n(n+1)}{2}$. (e) Da, $\dim = \frac{n(n+1)}{2}$. (f) Da, $\dim = \frac{n(n-1)}{2}$. (g) Ne, saj ne vsebuje ničelne matrike. (h) Ne, saj ni zaprt za seštevanje. (i) Ne, matriki E_{12} in E_{21} sta nilpotentni, vendar $E_{12} + E_{21}$ *ni* nilpotentna. (j) Da, $\dim = \frac{n(n-1)}{2}$. (k) Da, $\dim = n^2 - 1$.

2. Naj bo N matrika
$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
   Preveri, da je množica vseh realnih 2×2 matrik, ki komutirajo z N, tj.
$$U = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : AN = NA\},$$
   vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Poišči bazo za U in določi njegovo dimenzijo!
   Rešitev: Za poljubni $A, B \in U$ velja $AN = NA$ in $BN = NB$, zato je
$$(\alpha A + \beta B)N = \alpha AN + \beta BN = \alpha NA + \beta NB = N(\alpha A + \beta B),$$
   torej je U zaprta za linearne kombinacije in je podprostor. $\mathcal{B}_U = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$, $\dim U = 2$.

3. (a) Ali je množica $\{p(x) = ax + b : a \neq 0, a, b \in \mathbb{R}\}$ vektorski podprostor v vektorskem prostoru polinomov $\mathbb{R}_1[x]$?

   (b) Ali je množica $\{p(x) : p(1) = 0\}$ vektorski podprostor v vektorskem prostoru polinomov $\mathbb{R}_2[x]$?

   (c) Ali je množica $\{p(x) : p(0) = 1\}$ vektorski podprostor v vektorskem prostoru polinomov $\mathbb{R}_n[x]$?

(d) Ali je množica $\{p(x) : p''(3) = 0\}$ vektorski podprostor v vektorskem prostoru polinomov $\mathbb{R}_3[x]$?

Rešitev: (a) Ne, saj ne vsebuje ničelnega polinoma. (b) Da, baza $\{x-1, x^2-x\}$.
(c) Ne, saj ne vsebuje ničelnega polinoma. (d) Da, baza $\{1, x, x^3-9x^2\}$.

4. Za polinom $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ in kvadratno matriko A označimo $p(A) = aA^3 + bA^2 + cA + dI$. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Naj bo $U \subseteq \mathbb{R}_3[x]$ množica tistih polinomov stopnje največ 3, za katere je $p(A) = 0$ (ničelna matrika).

(a) Dokaži, da je U vektorski podprostor v $\mathbb{R}_3[x]$.

(b) Poišči bazo za podprostor U in določi $\dim U$.
(*Namig:* Če je $\Delta_A(x)$ karekteristični polinom A, potem je $\Delta_A(A) = 0$.)

(c) Naj bo $q(x) = x(x^2-2x-3)$. Ali je množica vseh 2×2 matrik $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, za katere velja $q(X) = 0$, vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{2\times 2}$?

Rešitev:

(a) Vzemimo polinoma $p, q \in U$ in skalarja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ker velja $p(A) = 0$ in $q(A) = 0$, sledi

$$(\alpha p + \beta q)(A) = \alpha p(A) + \beta q(A) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0,$$

kar pomeni $\alpha p + \beta q \in U$ in U je podprostor.

(b) Za karakteristični polinom $\Delta_A(x)$ matrike A velja $\Delta_A(A) = 0$ (ničelna matrika). Hitro vidimo

$$\Delta_A(x) = \det(A - xI) = x^2 - 2x - 3.$$

V U so torej lahko le tisti polinomi stopnje največ 3, ki so večkratniki $\Delta_A(x)$. Od tod dobimo $\mathcal{B}_U = \{x^2-2x-3, x(x^2-2x-3)\}$ in $\dim U = 2$.

5. Naj bo F množica vseh Fibbonacijevih zaporedij, tj. zaporedij $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, kjer sta a_0 in a_1 poljubni realni števili, za $n \geq 2$ pa velja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Dokaži, da je F vektorski prostor za operaciji

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\} \text{ in } \alpha\{a_n\} = \{\alpha a_n\},$$

kjer je $\alpha \in \mathbb{R}$. Poišči bazo za F in zapiši običajno Fibbonaccijevo zaporedje (tisto z $a_0 = a_1 = 1$) v tej bazi.

Rešitev: Preverjanje lastnosti vektorskega prostora je sicer dolgo, vendar rutinsko, zato ta del izpustimo. Bazo za F tvorita zaporedji $\{f_n\}$ in $\{g_n\}$ z začetnima členoma $f_0 = 1, f_1 = 0$ in $g_0 = 0, g_1 = 1$, tj.

$$\{f_n\} = \{1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots\}$$
$$\text{in } \{g_n\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots\}.$$

Fibonaccijevo zaporedje $\{a_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\}$ v tej bazi je $\{a_n\} = \{f_n\} + \{g_n\}$.

6. Na odprtem intervalu $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ definiramo operacijo $x \oplus y := xy$, za skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ pa predpišemo še $\alpha \odot x = x^\alpha$. Preveri, da je $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ in poišči njegovo bazo. Katero število v $\mathbb{R}^+$ je ničelni vektor v tem primeru?
   Rešitev: Rutinsko preverjanje lastnosti vektorskega prostora ponovno izpustimo. Ničelni vektor v tem primeru je $1 \in \mathbb{R}^+$, baza za $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ pa je (recimo) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^+} = \{e\}$.

7. *(Prostor polinomov)* Naj bo $\mathbb{R}[x]$ množica vseh polinomov z realnimi koeficienti v spremenljivki x. ($\mathbb{R}[x]$ torej vsebuje polinome vseh stopenj!) Preveri, da je $\mathbb{R}[x]$ vektorski prostor za običajni operaciji seštevanja polinomov in množenja s skalarjem. Poišči bazo za $\mathbb{R}[x]$. Poišči še bazo podprostora

$$W = \{p \in \mathbb{R}[x] : p(1) = p(-1) = 0\}.$$

   Koliko je $\dim \mathbb{R}[x]$ in koliko $\dim W$?
   Rešitev: Baza za $\mathbb{R}[x]$ je recimo $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$. To je neskončna množica z močjo naravnih števil $\mathbb{N}$, zato je $\dim \mathbb{R}[x] = |\mathbb{N}|$, kar pogosto označimo z $\aleph_0$, dimenzija $\mathbb{R}[x]$ je torej (števno) neskončna.
   Za bazo W pa lahko vzamemo $\{x^2 - 1, x(x^2 - 1), x^2(x^2 - 1), \ldots\}$. Tudi ta baza ima neskončno elementov, $\dim W = \aleph_0$.

8. *(Prostor formalnih potenčnih vrst)* Naj bo $\mathbb{R}[[x]]$ množica vseh formalnih potenčnih vrst z realnimi koeficienti, elementi $\mathbb{R}[[x]]$ so torej (formalne) vsote

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

   ki jih lahko po komponentah seštevamo in množimo s skalarjem. Preveri, da je tudi $\mathbb{R}[[x]]$ vektorski prostor. Kako se $\mathbb{R}[[x]]$ razlikuje od $\mathbb{R}[x]$? (*Namig:* Poišči vsaj eno vrsto, ki ni polinom.) Koliko je $\dim \mathbb{R}[[x]]$?
   Rešitev: Prostor $\mathbb{R}[[x]]$ je 'precej večji' od $\mathbb{R}[x]$, saj $\mathbb{R}[[x]]$ poleg polinomov vsebuje vse (tako konvergente kot divergentne) potenčne vrste. Recimo tisto za e^x; $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$. Množica $\{1, x, x^2, \ldots\}$ *ni* baza za $\mathbb{R}[[x]]$, saj že vrste za e^x ni mogoče izraziti s (končno!) linearno kombinacijo polinomov $1, x, x^2, \ldots$. Preostanek rešitve te naloge presega zahteve tega predmeta. Obstoj baze za $\mathbb{R}[[x]]$ je (krepka) posledica aksioma izbire. Tudi z aksiomom izbire baze ni mogoče eksplicitno zapisati, vemo pa, da je večja od baze za $\mathbb{R}[x]$; $\dim \mathbb{R}[[x]] = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$, tj. baznih vektorjev je toliko, kot je realnih števil.

9. Naj bo $V \subseteq C^\infty(0, 2\pi)$ množica vseh rešitev diferencialne enačbe

$$y'' + y = 0.$$

   Prepričaj se, da je V vektorski podprostor v $C^\infty(0, 2\pi)$. Poišči njegovo bazo!
   Rešitev: Naj bosta y_1 in y_2 rešitvi zgornje diferencialne enačbe. Potem je

$$(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)'' + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1(y_1'' + y_1) + \alpha_2(y_2'' + y_2) = 0 + 0 = 0,$$

   torej je V zaprta za linearne kombinacije in je vektorski podprostor. Vemo tudi, da lahko vsako rešitev te diferencialne enačbe zapišemo kot $y(x) = C \cos x + D \sin x$, kjer sta C in D realni števili. Baza za V je torej $\{\cos x, \sin x\}$, $\dim V = 2$.

Vektorski prostori $(V, +, \cdot)$

Če imamo podmnožico $\mathcal{U}$ vekt. prostora, rečemo, da je vektorski podprostor, če

1. za $\forall\, u, v \in \mathcal{U} \Rightarrow u + v \in \mathcal{U}$
2. za $\forall\, u \in \mathcal{U}$ in $\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha u \in \mathcal{U}$

1. $(\mathbb{R}^{n \times n}, +, \cdot)$

Ali so vektorski podprostori? Če ja, določi tudi dimenzijo.

Npr. $\dim(\mathbb{R}^{n\times n}) = n^2$ ... n^2 prostih spremenljivk

Standardna baza za $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \overset{E_{11}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} + b \overset{E_{12}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} + c \overset{E_{21}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} + d \overset{E_{22}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

tj., vsako 2×2 matriko lahko napišemo kot lin. kombinacijo teh štirih matrik, $\dim = 4$.

Std. baza za $\mathbb{R}^{n\times n}$: $\{E_{ij};\ i,j = 1 \dots n\}$

a) $\mathcal{U}_1 = \{A : A_{21} = 0\}$

Zaprto za $+$ in $\cdot$: očitno da je :)

$\dim \mathcal{U}_1 = n^2 - 1$, baza je $\{E_{ij};\ i,j = 1, \dots, n$ razen $(i,j) = (2,1)\}$

b) $\mathcal{U}_2 = \{A : A_{21} = 1\}$

$\mathcal{U}_2$ ni VPP: ni zaprto niti za $+$ niti za $\cdot$

c) $\mathcal{U}_3 = \{A : A_{ij} \in \mathbb{Z}\}$

Je zaprto za $+$, ne pa za $\cdot$ z realnim skalarjem

d) $\mathcal{U}_4$: zgornje trikotne matrike

Je VPP.

$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Baza za $\mathcal{U}_4 = \{E_{ij} ; i \leq j\} = \{E_{ii} ; i=1,\dots,n\} \cup \{E_{ij} ; i<j\}$

$n + \frac{n(n-1)}{2}$

$\dim \mathcal{U}_4 = \frac{n(n+1)}{2}$

e) $\mathcal{U}_5 = \{A : A = A^T\}$

Na pamet: je VPP. Dokažimo ;)

① Če $A, B \in \mathcal{U}_5 \Leftrightarrow A^T = A,\ B^T = B$

$\Rightarrow (A+B)^T = A^T + B^T = A + B \Rightarrow A+B \in \mathcal{U}_5$

② Če $\alpha \in \mathbb{R},\ A \in \mathcal{U}_5 \Leftrightarrow A^T = A$

$\Rightarrow (\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A \Rightarrow \alpha A \in \mathcal{U}_5$

Pa baza?

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} = aE_{11} + dE_{22} + fE_{33} + b(E_{21} + E_{12}) + c(E_{31} + E_{13}) + e(E_{32} + E_{23})$$

Torej: baza za $\mathcal{U}_5 = \{E_{ii} ; i = 1,\dots,n\} \cup \{E_{ij} + E_{ji} ; i<j\}$

$\dim \mathcal{U}_5 = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

f) $\mathcal{U}_6 = \{A : A^T = -A\}$

① Če $A^T = -A$ in $B^T = -B$

$\Rightarrow (A+B)^T = A^T + B^T = -(A+B)$ $\boxed{\checkmark}$

$\Rightarrow A+B \in \mathcal{U}_6$

② Če $A^T = -A$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (\alpha A)^T = \alpha A^T = -\alpha A \Rightarrow \alpha A \in \mathcal{U}_6$ $\boxed{\checkmark}$

Lahko bi tudi z lin. kombinacijo...

$(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T = -\alpha A - \beta B = -(\alpha A + \beta B)$

Baza?

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} = a(E_{12} + E_{21})$$

Baza za $\mathcal{U}_6 = \{E_{ij} - E_{ji} \,;\, i<j\}$

$$\dim \mathcal{U}_6 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\dim \mathcal{U}_5 + \dim \mathcal{U}_6 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2$$

Za $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ lahko zapišemo kot

$$A = \underbrace{\frac{A+A^T}{2}}_{\in \mathcal{U}_5} + \underbrace{\frac{A-A^T}{2}}_{\in \mathcal{U}_6}$$

g) U_7 = obrnljive matrike

$$\underset{\text{obrnljivi}}{I + (-I)} = \underset{\text{ni obrnljiva}}{0}$$

Tudi: težave pri $\cdot$ s skalarjem 0

h) $U_8 = \{A \,;\, \det(A) = 0\}$ = neobrnljive matrike

Za $\cdot$ s skalarjem je zaprta množica.

Toda: $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{nista obrnljivi}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{je obrnljiva!}}$

i) $U_9 = \{A \,;\, A^m = 0 \text{ za nek } m\}$ nilpotentne matrike

Primer: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ali $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Če seštejemo ti matriki: $\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A$

$A^2 = I \quad A^3 = A \quad A^4 = I \quad \dots$

Vsekakor torej niso VPP.

j) U_{10} = zgornje-trikotne nilpotentne matrike

$$\begin{bmatrix} x_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} x_1^m & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n^m \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Če je zg. Δ matrika nilpotentna (tj. $A \in U_9$)

$\Rightarrow A_{ii} = 0$ za $i = 1, \dots, n$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^3 = 0$

Če ima A na diagonali ničle, bo tudi ena diagonala "višje" $\to$ tudi polna ničel

$\to$ in vsakič ko potenciramo, se prestavi višje.

Torej, če imamo strogo zgΔ (po diag tudi 0) matriko, je tudi nilpotentna.

$\Rightarrow U_{10}$ = mn. strogo zgornje-trikotnih matrik

$\Rightarrow$ podobno kot d) primer.

k) $\mathcal{U}_{11} = \{A : tr(A) = 0\}$ tj. vsota diag. el. $= 0$

$A, B \in \mathcal{U}_{11}$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$tr(A) = tr(B) = 0$

$\Rightarrow tr(\alpha A + \beta B) = tr(\alpha A) + tr(\beta B) =$

$= \alpha\, tr(A) + \beta\, tr(B) = 0 \Rightarrow \alpha A + \beta B \in \mathcal{U}_{11}$

Dimenzija?

Imamo eno enačbo: $A_{11} + \ldots + A_{nn} = 0$

Torej bi moralo biti $\dim \mathcal{U}_{11} = n^2 - 1$,

ker imamo 1 enačbo in n^2 spremenljivk.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & & \\ \vdots & a_{22} & \ddots & & \\ & & & a_{n-1,n-1} & \\ & & & & (-a_{11}-a_{22}-\ldots-a_{n-1,n-1}) \end{bmatrix} = \sum_{i \neq j} a_{ij} E_{ij} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii}(E_{ii} - E_{nn})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 \ddots & \\ & & -1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

$\dim \mathcal{U}_{11} = \underbrace{(n^2 - n)}_{\text{št. izvendiag. elementov}} + n - 1 = \underline{n^2 - 1}$

2) $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \mathcal{U} = \{A : AN = NA\}$ množica matrik, ki komutira z N

Pokažimo, da je $\mathcal{U}$ VPP.

Če sta A in B iz $\mathcal{U}$ $(A, B \in \mathcal{U})$

$\Rightarrow AN = NA$ in $BN = NB$

$(\alpha A + \beta B)N = \alpha AN + \beta BN = \alpha NA + \beta NB =$

$= N(\alpha A + \beta B) \Rightarrow \alpha A + \beta N \in \mathcal{U}$

Baza?

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}$

$\left.\begin{matrix} b = 0 \\ a = d \end{matrix}\right\}$ dve neodv. enačbi

$b = 0$ prosti spremenljivki c in d

Baza: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\dim \mathcal{U} = 2$

Baza $= \{N, I\}$