1. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika, ki ima vse lastne vrednosti nenegativne.
   (a) Pokaži, da je A obrnljiva, če in samo če so njene lastne vrednosti (strogo) pozitivne.
   (b) Recimo, da je A obrnljiva. Dokaži, da so vse lastne vrednosti A pozitivne le, če so vse lastne vrednosti A^{-1} pozitivne.
   (c) Recimo, da velja še $A^\top = A$. Utemelji, da obstaja matrika S, ki ima vse lastne vrednosti nenegativne in velja $S^2 = A$. Tako matriko S označimo z $S = \sqrt{A}$.

2. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$
   (a) Poišči vse lastne vektorje in pripadajoče lastne vrednosti matrike A.
   (b) Izračunaj $\sqrt{A}$.

3. (a) Preveri, da ima za vsako matriko $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrika $M^\top M$ nenegativne lastne vrednosti.
   Namig: Kaj je skalarni produkt $M^\top M\mathbf{v}$ in $\mathbf{v}$ za lastni vektor $\mathbf{v}$ matrike $M^\top M$?
   (b) Utemelji, da je Frobeniusova norma *submultiplikativna*, tj. velja
$$\|AB\|_\mathrm{F} \le \|A\|_\mathrm{F}\|B\|_\mathrm{F}$$
   za vse $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
   Namig: Uporabi Cauchy–Schwarzovo neenakost za Frobeniusov skalarni produkt in (a).

4. Poišči razcep Cholesky-ega ($A = LL^\top$, kjer je L spodnje trikotna matrika) matrike
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$
   z uporabo spodnjega (rekurzivnega) algoritma:
   Simetrično matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zapišemo v bločni obliki
$$A_1 := A = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{b} & B \end{bmatrix}$$
   in definiramo
$$L_1 := \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & \mathbf{0}^\top \\ \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\mathbf{b} & I_{n-1} \end{bmatrix}.$$
   Tedaj je
$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{b} & B \end{bmatrix} = L_1 \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & B - \frac{1}{a_{11}}\mathbf{b}\mathbf{b}^\top \end{bmatrix} L_1^\top.$$
   Ponovimo na simetrični matriki $A_2 := B - \frac{1}{a_{11}}\mathbf{b}\mathbf{b}^\top \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$.
   Naj bodo $L_2, L_3, \ldots, L_n$ matrike, ki jih dobimo v ponovljenih korakih. Matrika L je potem
$$L = L_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & L_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & L_n \end{bmatrix}.$$

5. Dani sta matriki
$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
   (a) Prepričaj se, da imata matriki J in $J+N$ enaka karakteristična polinoma (in zato enake lastne vrednosti).
   (b) Poišči lastne vrednosti matrik J in $J+N$.
   (c) Diagonaliziraj matriko J v ortonormirani bazi $\mathbb{R}^3$ – poišči diagonalno matriko D ter ortogonalno matriko Q, da bo $J = QDQ^{\mathsf{T}}$.
   (d) Se da matriko $J+N$ tudi diagonalizirati? Zakaj oz. zakaj ne?

6. Poišči (ekonomični) singularni razcep matrike
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$
tj. poišči ortogonalni matriki U in V ter (kvadratno) diagonalno matriko S, da bo $A = USV^{\mathsf{T}}$. Lahko slediš tem korakom:
   (a) Diagonaliziraj $A^{\mathsf{T}}A$ v ortonormirani bazi $\mathbb{R}^2$. Prepričaj se, da je prehodna matrika ravno V, diagonalna matrika pa točno S^2.
   (b) S pomočjo S in V iz prejšnje točke ter zapisa $A = USV^{\mathsf{T}}$ določi še U.

7. Poišči matriki ranga 1 in 2, ki sta v Frobeniusovi normi najbližji matriki
$$K = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$
tj. tisti matriki $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ rangov 1 in 2, za kateri sta števili $\|X_1 - K\|_F$ ter $\|X_2 - K\|_F$ najmanjši možno.

8. Naj bo
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -4 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$
   (a) Točno ena izmed matrik A in B je pozitivno semidefinitna. Katera? Utemelji odgovor.
   (b) Za tisto matriko, ki je pozitivno semidefinitna, izračunaj razcep Choleskega, tj. poišči spodnje–trikotno matriko L, za katero velja $A = LL^{\mathsf{T}}$.

1 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, vse lastne vrednosti so nenegativne

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$

a) A obrnljiva $\Leftrightarrow \lambda_1 \dots \lambda_n > 0$

Vemo: $\det(A) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$

Če $\lambda_1 \dots \lambda_n > 0 \Rightarrow \det(A) > 0 \Rightarrow A$ je obrnljiva

Če A obrnljiva $\Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n \neq 0 \Rightarrow$ nobena ni nič

$\Rightarrow \lambda_1 \dots \lambda_n > 0$

(skupaj s predp.)

b) Recimo, da je A obrnljiva

Lvr. A so pozitivne $\Leftrightarrow$ Lvr. A^{-1} so pozitivne

Recimo, da imamo

$$A v = \lambda v \quad / A^{-1}$$

$$v = \lambda A^{-1} v$$

$$A^{-1} v = \lambda^{-1} v \quad \Rightarrow \quad \lambda^{-1} \text{ je Lvr. za } A^{-1}$$

λ in λ^{-1} sta istega predznaka

Mimogrede:

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = PD^nP^{-1}$$

$$A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

c) Recimo, da je A diagonalizibilna.
Utemelji, da obstaja matrika S, ki ima same nenegativne lastne vrednosti in da je $S^2 = A$ $(S = \sqrt{A})$.

Imamo razcep

$$A = PDP^{-1}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 \dots \lambda_n \geq 0$$

(glej prejšnji primer za ↓)

$$\text{Definirajmo } S = P\sqrt{D}P^{-1} = P\begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}P^{-1}$$

velja $\sqrt{D} \cdot \sqrt{D} = D$

$$S^2 = P\sqrt{D}\underbrace{P^{-1}P}\sqrt{D}P^{-1} = P\sqrt{D}\sqrt{D}P^{-1} = PDP^{-1} = A$$

Tj. $A^{\frac{1}{2}} = PD^{\frac{1}{2}}P^{-1}$

za $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ne obstaja tak S => ni diagonalizibilna

---

$A^T = A$

A je PSD <=> vse l.vr. so nenegativne $(\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0)$
<=> za vse vektorje velja $\langle Av, v \rangle \geq 0$
sk. prod. $= (Av)^T v$

Če $A^T = A$ imamo $A = QDQ^T$
Če je A še PSD => lahko definiramo $\sqrt{A}$, ki je tudi PSD

2) $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ simetrična $\rightarrow$ se da diag.

a) Izračunajmo L.vr.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 1 \\ 3 & 6-\lambda & 3 \\ 1 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 1 \\ 3 & 6-\lambda & 3 \\ -1+\lambda & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & 1 \\ 6 & 6-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 6 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\big((3-\lambda)(6-\lambda)-18\big) =$$

$$=(1-\lambda)(-9\lambda+\lambda^2) = \lambda(1-\lambda)(-9+\lambda)$$

$\lambda_1=0 \quad \lambda_2=1 \quad \lambda_3=9$

$\boxed{\lambda_3=9}$

$$\begin{bmatrix} -7 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 7 & 1 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$\sim \Big[$?? PREVERI $\Big] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{aligned} x-z&=0 \\ y+2z&=0 \end{aligned}$ $V_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{\lambda_2=1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ $\begin{aligned} x+z&=0 \\ y&=0 \end{aligned}$ $V_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\boxed{\lambda_3 = 0}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x - z = 0 \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$y + z = 0$$

$$q_1 = \dots, q_2 = \dots, q_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} v_3$$

$$D = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}$$

$\uparrow$

L. vr.

$$\sqrt{A} = Q \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} Q^T$$

$$A = QDQ^T = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \dots =$$

$$= \lambda_1 q_1 q_1^T + \lambda_2 q_2 q_2^T + \dots + \lambda_n q_n q_n^T$$

$$\sqrt{A} = 3 q_1 q_1^T + 1 \cdot q_2 q_2^T = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = S$$

3 a) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

A^TA je PSD

$$ {}^{m}\left[\, A^T \,\right]_{n} \left[\, A \,\right]_{m}^{n} $$

$M = A^TA \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$ simetrična

Naj bo $v \in \mathbb{R}^n$

$$\langle Mv, v\rangle = \langle A^TAv, v\rangle = (A^TAv)^Tv = v^TA^TAv =$$
$$= (Av)^TAv = \langle Av, Av\rangle = \|Av\|^2 \geq 0$$

Cauchy-Schwarzove neenakost:

$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ (tudi $|\langle A, B\rangle_F| \leq \|A\|_F \cdot \|B\|_F$

$\langle A, B\rangle_F = tr(A^TB)$ $\|A\|_F^2 = tr(A^TA)$

Velja:

$\langle A - xB, A - xB\rangle \geq 0$ za vse $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x \in \mathbb{R}$

$$\overset{\shortparallel}{\langle A, A\rangle_F} - x\langle A, B\rangle_F - x\langle B, A\rangle_F + x^2\langle B, B\rangle_F =$$
$$= \underset{\overset{\shortparallel}{a}}{x^2\|B\|_F^2} - \underset{\overset{\shortparallel}{b}}{2x\langle A, B\rangle_F} + \underset{\overset{\shortparallel}{c}}{\|A\|_F^2} = p(x)$$

vemo, da je povsod nenег.
pogoj $D \leq 0$

$D = b^2 - 4ac$ $4|\langle A, B\rangle_F|^2 - 4\|A\|_F^2\|B\|_F^2 \leq 0 \Rightarrow |\langle A, B\rangle_F|^2 \leq \|A\|_F^2\|B\|_F^2$