1. Eksponentna funkcija kvadratne $n \times n$ matrike A je (lahko) definirana z

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

(V Taylorjevo vrsto za e^x smo namesto števila x vstavili matriko A.)

   (a) Utemelji, da velja $\det(e^A) = e^{\operatorname{tr}(A)}$.

   (b) Recimo, da je matrika A antisimetrična, tj. $A^{\mathsf{T}} = -A$. Dokaži, da je tedaj matrika e^A ortogonalna z determinanto 1.

2. Poišči Schurova razcepa matrik

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Naj bo A poljubna matrika, U in V pa taki ortogonalni matriki, da obstaja produkt UAV. Preveri, da velja naslednje:

   (a) $\|UA\|_{\mathrm{F}} = \|A\|_{\mathrm{F}}$,

   (b) $\|AV\|_{\mathrm{F}} = \|A\|_{\mathrm{F}}$,

   (c) $\|UAV\|_{\mathrm{F}} = \|A\|_{\mathrm{F}}$.

4. Poišči matrike ranga 1, ki so (v Frobeniusovi normi) najbližje matrikam:

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

   Ali so take matrike enolične?

ni toliko mičel

$\lambda_1 = 6, \ \lambda_{2,3} = 3$

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad q_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$Q_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Schurov razcep $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$A = QTQ^T$

zgornje trikotna matrika

ortogonalna matrika

[1] Najprej poiščemo neko l. vrednost λ_1 z l. vekt. $\vec{v}_1$

$q_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ $\quad Aq_1 = \lambda_1 q_1$

[2] Sestavimo ortogonalno matriko

$$Q_1 = \begin{bmatrix} q_1, & \underbrace{q_2 \cdots q_n}_{} \end{bmatrix}$$

nekako izberemo, da bo matrika ortogonalna

in izračunamo produkt $Q_1^T A Q_1$

(Dobimo $Q_1^T A Q_1 = Q_1^T A \begin{bmatrix} q_1, q_2 \cdots q_n \end{bmatrix} = Q_1^T \begin{bmatrix} Aq_1, Aq_2 \cdots Aq_n \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 q_1, \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 q_1^T q_1 & \cdots \\ \lambda_1 q_2^T q_1 & \\ \vdots & \\ \lambda_1 q_n^T q_1 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \boxed{} \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{A_2} \\ 0 & \end{bmatrix}$$)

q-ji so $\perp$ in $\|q\| = 1$

Dobimo 1. stolpec od $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \; \lambda_n \end{bmatrix}$

[3] Postopek ponovimo z podmatriko A_2, dokler ne dobimo zgornjetrikotne matrike.

② $B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2\end{bmatrix}$ Poišči schurov razcep!

Poiščimo l.vr.:

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2(1-\lambda)\qquad \lambda_{1,2}=2,\quad \lambda_3=1$$

$\boxed{\lambda_{1,2}=2}$

$$\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad v_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$\boxed{\lambda_3=1}$

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad v_2=\begin{bmatrix}1\\1\\2\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

Izberemo v_1, saj je že normiran!

$$Q_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Nekako izberemo stolpce, da so pravokotni.

slučajno tudi permutacijska matrika $\Rightarrow$ zamenja stolpce

$$Q_1^T\underline{BQ_1}=Q_1^T\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=Q_1^T\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

ponovimo postopek! $=B_2$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) \qquad \lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2$$

$\boxed{\lambda_2 = 2}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\lambda_1 = 1}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sicer: za 2×2 matrike A: če imamo λ_1, λ_2:

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

v_2 $\qquad$ v_1

Izberimo v_1, saj je že normiran.

$$Q_2' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad Q_2^T B_2 Q_2 = Q_2^T \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{Q_2'} & \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

$$= Q_2^T \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_2^T Q_1^T B Q_1 Q_2 = T \qquad / Q_2 \cdot, \; Q_1 \cdot, \; \cdot Q_2^T, \; \cdot Q_1^T$$

$$B = \underbrace{Q_1 Q_2}_{Q} T \underbrace{Q_2^T Q_1^T}_{Q^T}$$

$$Q = Q_1 Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Frobeniusova norma

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix} \qquad \|A\|_F=\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}$$

$$\|A\|_F^2=tr(A^TA)$$ manj učinkovito

3 A matrika; U, V ortogonalni matriki

a) $\|UA\|_F=\|A\|_F$

$$\|UA\|_F^2=tr((UA)^T(UA))=tr(A^T\underbrace{\overset{U^{-1}}{U^T}U}_{I}A)=tr(A^TA)=\|A\|_F^2$$

b) $\|AV\|_F=\|A\|_F$ velja: $tr(AB)=tr(BA)$

$$\|AV\|_F^2=tr((AV)^TAV)=tr(V^TA^TAV)=tr(VV^TA^TA)=$$
$$=tr(A^TA)=\|A\|_F$$

c) $\|UAV\|_F=\|A\|_F$

$$\|UAV\|_F\overset{a}{=}\|AV\|_F\overset{b}{=}\|A\|_F$$

SVD razcep matrike $A\in\mathbb{R}^{n\times m}$

$$A=U\cdot\Sigma\cdot V^T \qquad \Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n\end{bmatrix}$$ U, V ortogonalni

singularne vr.

Npr $A^T=A$ vemo $A=QDQ^T \Rightarrow D=\Sigma \quad U=V=Q$

Velja $\|A\|_F=\|U\Sigma V^T\|_F=\|\Sigma\|_F=\sqrt{\sum\sigma_n^2}$

Izrek: Če imamo $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ s singularnim razcepom, $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \end{bmatrix}$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$, potem je $M = U \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_k & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} V^T$ ranga k, za katero je $\|A - M\|_F$ minimalna.

4) Poišči matr. ranga 1, ki je najbližje dani matriki.

a) $A = I \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \cdot I^T$ $\quad A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{V^T}$

Definirajmo M, $\operatorname{rang}(M) = 1$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 9 \overset{\dots}{=} (-2-\lambda)(4-\lambda)$$

$\lambda_1 = 4 = \sigma_1 \qquad \lambda_2 = -2 = \sigma_2$

$A - 4I = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \qquad A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

$v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad M = Q \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^T = 4 q_1 q_1^T = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}}}$

c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$C = \underset{U}{\underset{\parallel}{Q}} \cdot 2I \cdot \underset{V^T}{\underset{\parallel}{Q^T}}$

rotira za kot φ

recimo, da $Q = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$

$M = Q \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^T = \begin{bmatrix} 2\cos\varphi & 0 \\ 2\sin\varphi & 0 \end{bmatrix} Q^T = 2\begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin\varphi\cos\varphi \\ \sin\varphi\cos\varphi & \sin^2\varphi \end{bmatrix}$ $\varphi \in \mathbb{R}$

$\|C - M\|_F = 2$