1. Poišči vse lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Poišči lastne vrednosti in ortogonalne baze pripadajočih lastnih podprostorov simetrične matrike

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Dani sta $n \times n$ matriki

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Poišči bazi za $N(A_i)$ in $C(A_i)$, tj. bazi ničelnega in stolpčnega prostora A_i.

   (b) Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike A_i.
   Namig: Zakaj je $N(A_i)$ lastni podprostor za A_i? Zakaj je $N(A_i)^\perp$ vsota ostalih lastnih podprostorov za A_i?

4. O *simetrični* matriki $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ vemo naslednje: 3 je 2-kratna lastna vrednost A, vektorja

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ in } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   pa A slika enega v drugega, tj. $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ in $A\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$. Poišči tako matriko A ali pa utemelji, zakaj ne obstaja!

5. Eksponentna funkcija kvadratne $n \times n$ matrike A je (lahko) definirana z

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

   (V Taylorjevo vrsto za e^x smo namesto števila x vstavili matriko A.)

   (a) Utemelji, da velja $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$.

   (b) Naj bo A antisimetrična matrika, tj. velja $A^\mathsf{T} = -A$. Dokaži, da je v tem primeru matrika e^A ortogonalna z determinanto 1.

mi na pdf

6

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Poiščimo l.vr. in l. vekt. Se da diagonalizirati?

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \underbrace{(1-\lambda)(1-\lambda)}_{\text{dvojna ničla}}(2-\lambda) =$$

(rešujemo $(A-\lambda I)v = 0$)

$\boxed{\lambda_{1,2} = 1}$

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_2 = 0$
$x_3 = 0$
x_1 .. prosta spr.

npr.

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\lambda_3 = 2}$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \\ 2+ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = x_3$
$x_2 = 0$
x_3 je prosta

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ne da se diagonalizirati. Zakaj?

$$P = \begin{bmatrix} v_1 \dots v_n \end{bmatrix}$$

Imamo le 2 lin. neodv. vekt, bi pa morali sestaviti bazo.

Če imamo dvojno lastno vrednost, se to lahko zgodi (ni pa nujno: primer je I)

2 $H=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&-1\\0&1&-1&1\end{bmatrix}$ Poišči lastne vrednosti in ortogonalno bazo pripadajočih l. podprostorov

Matrika je simetrična $\Rightarrow$ lastne vrednosti so realne

$\Rightarrow$ l. podpr. za različne l. vr. ortogonalni

$\Rightarrow$ matriko se da diagonalizirati z ortogonalno prehodno matriko $Q: H=QDQ^T$ $(Q^TQ=QQ^T=I)$

$\begin{vmatrix}A & C\\ 0 & B\end{vmatrix}=\det(A)\det(B)$

$$\det(H-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1&0\\1&-\lambda&0&1\\1&0&-\lambda&-1\\0&1&-1&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1&0\\1&-\lambda&0&1\\0&\lambda&-\lambda&-2\\0&1&-1&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&1&0\\1&-\lambda&0&1\\0&0&-\lambda&-2\\0&0&-1&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\1&-\lambda\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-\lambda&-2\\-1&1-\lambda\end{vmatrix}=\big((1-\lambda)(-\lambda)-2\big)\big((-\lambda)(1-\lambda)-2\big)=$$

$$=(-\lambda+\lambda^2-2)^2=\big((\lambda-2)(\lambda+1)\big)^2$$

$\boxed{\lambda_{1,2}=2}$

$$\begin{bmatrix}-1&1&1&0\\1&-2&0&1\\1&0&-2&-1\\0&1&-1&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&-1&0\\0&-1&1&1\\0&1&-1&-1\\0&1&-1&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-2&-1\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$x_1-2x_3-x_4=0$

$x_2-x_3-x_4=0$

x_3, x_4 prosta

določimo tako, da sta neodvisni

$$v_1=\begin{bmatrix}2\\1\\1\\0\end{bmatrix},\quad v_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$\boxed{\lambda_{3,4}=-1}$

$$\begin{bmatrix}2&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&-1\\0&1&-1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&-1&1&-2\\0&-1&1&-2\\0&1&-1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$x_1+x_3-x_4=0$

$x_2-x_3+2x_4=0$

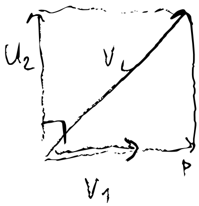
$$V_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix},\quad V_4=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}$$

oba od v_1 in v_2 bi morala biti $\perp$ na oba od v_3 in v_4

Vidimo, da je res $\mathcal{L}(v_1, v_2) \perp \mathcal{L}(v_3, v_4)$

" l. podpr. za v_1 in v_2 " — " — v_3 in v_4

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \quad H = PDP^{-1}$$



→ ni ortonormirano!

→ Gram-Schmidtov postopek

dela tako: $u_1 = v_1$

$u_2 = v - p$ (projekcija v_2 na v_1)

$$= v - \boxed{\frac{v_1 v_2}{v_1 \times v_1} \cdot v_1}$$

$u_1 \perp u_2$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{6} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

... le še normiramo

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ponovimo še za v_3 in v_4

Nato: $Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix} \Rightarrow H = QDQ^T$

4

$A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ $\quad v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \boxed{\begin{matrix} Av_1 = v_2 \\ Av_2 = v_1 \end{matrix}}$

vemo: $A^T = A$

$\lambda_{3,4} = 3$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \end{bmatrix}$$

Recimo, da enačbi seštejemo

$$Av_1 + Av_2 = v_1 + v_2$$

$$A(v_1+v_2) = (v_1+v_2)\cdot \underline{1}$$

lastna vrednost

$\lambda_1 = 1$

$u_1 = v_1 + v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Preverimo še odštevanje:

$$Av_1 - Av_2 = v_2 - v_1$$

$$A(v_1 - v_2) = (-1)(v_1 - v_2) \Rightarrow \quad \lambda_2 = 1 \quad u_2 = v_1 - v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Iščemo še l. vekt. za $\lambda_{3,4}$. Ker $A = A^T$...

l. podprostor za $\lambda_{3,4} = 3$ mora biti $\perp$ na $\mathcal{L}(u_1, u_2)$

$$\mathcal{L}(u_1, u_2)^{\perp} \overset{def}{=} C(B)^{\perp} = N(B^T) = N\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$B = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{matrix} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{matrix}$ $\quad u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad A = PDP^{-1}$ $\quad$ Za Q še normiramo stolpce

$\Downarrow$

$A = QDQ^T$