1. Poišči in kasificiraj stacionarne točke spodnjih funkcij.

   (a) $f(x,y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$

   (b) $g(x,y) = xe^x + 2ye^y + 1$

   (c) $h(x,y) = (1+e^y)\cos x - ye^y$

   (d) $k(x,y,z) = x^3 + y^3 + 3z^2 - 3xyz$

   (e) $r(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$

   (f) $u(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$

   (g) $v(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2$

   Rešitev: (a) Stacionarni točki sta $T_1(0,0)$, ki je lokalni maksimum, in $T_2(2,2)$, ki je sedlasta točka.
   (b) Stacionarna točka je $T(-1,-1)$, ki je lokalni minimum.
   (c) Stacionarne točke so $T_k(2k\pi,0)$, ki so lokalni maksimi, in $U_k((2k+1)\pi,-2)$, ki so sedlaste točke.
   (d) Stacionarni točki sta $T_1(0,0,0)$, za katero na podlagi H_k ne moremo odločiti tipa, saj $H_k(0,0,0)$ ni polnega ranga, in $T_2(2,2,2)$, ki ni ekstrem.
   (e) Stacionarne točke so $T_0(0,0,0)$, ki je lokalni minimum, ter $T_{1,2}(\pm1,\pm1,1)$ in $T_{3,4}(\pm1,\mp1,-1)$, ki so sedlaste točke.
   (f) Stacionarni točki sta $T_1(0,0)$, ki ni lokalni ekstrem, in $T_2(1,1)$, ki je lokalni minimum.
   (g) Stacionarne točke so $T_1(0,0)$, ki je lokalni maksimum, $T_2(0,2)$, ki je lokalni minimum, ter $T_3(-1,1)$ in $T_4(1,1)$, ki sta sedlasti točki.

2. Za $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ naj bo $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{a})(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{b})$.

   (a) Izračunaj $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2}$.

   (b) Dodatno privzemi, da sta $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ pravokotna. Katerega tipa je tedaj edina stacionarna točka f?

   Rešitev: (a) $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathbf{a}\mathbf{b}^\mathsf{T} + \mathbf{b}\mathbf{a}^\mathsf{T})$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2} = \mathbf{a}\mathbf{b}^\mathsf{T} + \mathbf{b}\mathbf{a}^\mathsf{T}$. (b) $\mathbf{0}$ je sedlo.

3. Naj bodo $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$. Poišči tisti vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, za katerega je vrednost izraza

   $$\|\mathbf{a}_1 - \mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{a}_2 - \mathbf{x}\|^2 + \cdots + \|\mathbf{a}_k - \mathbf{x}\|^2$$

   najmanjša možna.
   Rešitev: $\mathbf{x} = \frac{1}{k}(\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_k)$.

1. Poišči vse stacionarne točke (grad $f = 0$)

a) $f(x,y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$

$f_x = 3x^2 - 8x + 2y = 0$

$f_y = \quad 2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y$

Ustavimo $x = y$ v 1. enačbo...

$3x^2 - 8x + 2y = 0$

$3x^2 - 6x = 0$

$x(x-2) = 0$

$T_1(0,0) \quad T_2(2,2)$

Klasificirajmo T_1 in T_2.

Pri funkcijah ene spremenljivke:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stac. točke: $f' = 0$

$f'' > 0$ $\cup$ lok. min.

$f'' < 0$ $\cap$ lok. max.

$f'' = 0$? min, max, prevoj...
x^4, $-x^4$, x^3

Pri 2eh spr. še dodatne komplikacije (sedlo...)

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\mathrm{grad} f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$Hf: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times n}$

$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$ (vse) $\lambda_i > 0$ lok. min
(vse) $\lambda_i < 0$ lok. max
mešano sedlo
$\lambda = 0$?

$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6x-8 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

Če f vezno odvedljiva:
$\hookrightarrow f_{xy} = f_{yx}$ → realne l.vr.

$Hf(T_1) = \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad Hf(T_2) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

Namesto računanja l.vr.: ugotovimo definitnost.

Uporabimo Sylvestrov kriterij.

Sylvestrov kriterij $A^T = A$

A je PD, če so vse glavne poddeterminante pozitivne

A je ND, če so predznaki $-, +, -, +, \ldots$

$Hf(T_1)\ldots$ $D_1 = -8 < 0$
$D_2 = 12 > 0$ $\Rightarrow$ lok. max

$Hf(T_2)\ldots$ $D_1 = 4 > 0$
$D_2 = -12 < 0$ $\Rightarrow$ sedlo

$(4-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda - 12 = 0$

$D = 4 + 48 = 52 \quad \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{52}}{2}$

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$

počasi!