$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$v \in \mathbb{R}^n$ je lastni vektor matrike A za lastni vrednost $\lambda \in \mathbb{C}$, če

$$\boxed{Av = \lambda v,\ v \neq 0} \iff (A - \lambda I)v = 0 \underset{v \neq 0}{\iff} v \in N(A - \lambda I) \Rightarrow$$

$A - \lambda I$ ni obrnljiva

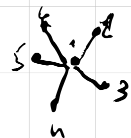
$$\iff \underbrace{\det(A - \lambda I) = 0}$$

lastne vr. izračunamo tako,

3

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Izračunajmo lastne vrednosti :)

(sosednostna mat. )

a) Poiščimo bazi za ničelni $N(A)$ in stolpčni $C(A)$ prostor

St. prostor je vekt. pr., ki ga napenjajo stolpci matr. (vse možne lin. komb.)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{u} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{v} \cdots \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

→ imamo 2 lin. neodv.
dimenzija je 2

baza za $C(A)=\{u, v\}$ $\quad \dim(C(A))=2$

(sicer pa Gauss, pogledamo kje so pivoti, vzamemo tiste stolpce)

$$N(A): \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ & & 0 & & \vdots \\ & & & & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 = 0$
$x_2 + \cdots + x_n = 0$

2 pivota,
$n-2$ prost. spr.
$\Downarrow$
$\dim(N(A)) = n-2$

$$v_3 = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \\ x_n \end{array}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad v_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_n = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

prost. spr. so $x_3 - x_n$

Baza za $N(A)=\{v_3, v_4, \ldots, v_n\}$

b) Izloči lastne vrednosti in vektorje

Ena l.v. je gotovo 0, ker imamo neprazen ničelni prostor ... $Av = 0 \cdot v, \ v \neq 0$

$Av = 0$

Vsak vekt. iz ničelnega prostora je l.v. za l.vr. 0.

$\Updownarrow$

$N(A)$ je lastni podprostor za $\lambda = 0$ (če $N(A) \neq \{\}$)

Torej $v_3 \dots v_n$ so l. vekt. za $\lambda = 0$

Torej $n-2$ last. vr. že imamo, manjkata še 2.

Opazimo, da je $A^T = A$. Vemo: če $A^T = A$, potem:

① l.vr. so realne

② Lahko izberemo bazo iz l.vekt, ki je ortogonalna

$V = N(A)$ je l. podprostor za $\lambda = 0$

Ker je A^T sim. vemo, da je

V ortogonalen na ostale l. podprostore (ortogonalni komplement, $V^\perp$)

velja: $V^\perp = N(A)^\perp = C(A^T) \overset{\text{sim!}}{=} C(A) = \mathrm{Lin}(\{u, v\})$

osnovni izr. lin. alg.

Lahko tudi preverimo, da je celoten prostor $\mathrm{Lin}(\{u, v\})$ pravokoten na $N(A)$

$$Au = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & & \\ \vdots & & 0 & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = (n-1)v$$

$$Av = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = u$$

Torej A slika stolpčni prostor nazaj v samega vase, torej lahko zapišemo 2×2 matr. za to presl.

$$B = \begin{array}{c|cc} & Au & Av \\ \hline u & 0 & 1 \\ v & n-1 & 0 \end{array}$$

poiščemo l.vr. za B

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ n-1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (n-1) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{n-1}$$

l.vr.: (1) $\begin{bmatrix} -\sqrt{n-1} & 1 \\ n-1 & -\sqrt{n-1} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -\sqrt{n-1} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{n-1} \end{bmatrix}$ koord l.vekt. v bazi V

če želimo v originalni bazi, moramo razumeti kot

$1\cdot u + \sqrt{n-1}\,v$

(2) $\begin{bmatrix} \sqrt{n-1} & 1 \\ n-1 & \sqrt{n-1} \end{bmatrix}$ . . . . $v_2 = 1\cdot u - \sqrt{n-1}\,v$

mimogrede: če $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

$f(A)=\sum a_k A^k$

$A=PDP^{-1} \Rightarrow f(A)=P\begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n)\end{bmatrix}P^{-1}$

5

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\det(e^A)=e^{tr(A)}$$

$tr(A)=\sum_{i=1}^{n} A_{ii}$ (def) velja $tr(A)$ je tudi $\lambda_1+\ldots+\lambda_n$

(pri 3 $tr(A)=0$)

$e^A=?$ Taylorjeva vr. za e^x (okoli $x_0=0$)

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

$$e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!} \text{ konvergira :)}$$

Recimo, da imamo

$A=PDP^{-1}$ $\quad D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$ $P=\begin{bmatrix}v_1 & \cdots & v_n\end{bmatrix}$ $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ l. vredn. $v_1,\ldots,v_n$ l. vekt.

$A^2=PD\underbrace{P^{-1}P}_{I}DP^{-1}=PD^2P^{-1}$ da se diagonalizirati tudi A^2!

po diag. so kvadrati lambd

$A^3=PD^3P^{-1}$

$\vdots$

$A^k=PD^kP^{-1}$

$D^k=\begin{bmatrix}\lambda_1^k & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k\end{bmatrix}$

Torej: $e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}PD^kP^{-1}=P\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{D^k}{k!}\right)P^{-1}=$

$$=P\begin{bmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_1^k & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_n^k\end{bmatrix}P^{-1}=P\begin{bmatrix}e^{\lambda_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n}\end{bmatrix}P^{-1}$$

$\Rightarrow$

$$\det(e^A) = \det\left(P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} P^{-1}\right) = \det(P)\det\left(\begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}\right)\det(P^{-1})$$

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$

$PP^{-1} = I \quad /\det$

$\det(PP^{-1}) = \det(I)$

$\det(P)\det(P^{-1}) = 1$

$$= \det P \cdot \det P^{-1} \cdot \det[\,\cdots\,] =$$

$$= 1 \cdot (e^{\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot e^{\lambda_n}) =$$

$$= e^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n} = e^{tr(A)}$$

za diagonabilna matrike

velja $tr(AB) = tr(BA)$

$A = PDP^{-1}$

$$\Rightarrow tr(A) = tr(\underbrace{PDP^{-1}}) = tr(DP^{-1}P) =$$

$$= tr(D) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$$