Matematika 1	**Izročki: 5. teden**

Vektorski prostor in podprostor. Baza.

Polona Oblak

1. Vektorski prostor

Realni vektorski prostor V je množica *vektorjev* $v \in V$, za katere imamo definirani dve notranji operaciji

- seštevanje vektorjev ($u, v \in V \Longrightarrow u+v \in V$) in
- množenje vektorjev z realnimi števili ($v \in V$, $\alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha v = \alpha \cdot v \in V$),

z lastnostmi

(VP1) $u + v = v + u$ in $(u + v) + w = u + (v + w)$,
(VP2) obstaja *ničelni vektor* $\mathbf{0}$ in velja $v + \mathbf{0} = \mathbf{0} + v = v$,
(VP3) za vsak $v \in V$ obstaja *nasprotni vektor* $-v$, za katerega velja $v + (-v) = (-v) + v = \mathbf{0}$,
(VP4) $1 \cdot v = v$ za vsak $v \in V$,
(VP5) $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$,
(VP6) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$,
(VP7) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$,

za poljubne $u, v, w \in V$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Pri tem bomo, kot običajno v matematiki, simbol $\cdot$ pri produktu vektorja s številom večinoma izpuščali. Torej bomo pisali tudi $\alpha v = \alpha \cdot v$.

Izrek 1. *Naj bo V vektorski prostor. Potem velja*

(1) *V vsebuje ničelni vektor $\mathbf{0}$,*
(2) *v vsakem vektorskem prostoru V je ničelni vektor $\mathbf{0}$ en sam,*
(3) *$\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$,*
(4) *$0 \cdot v = \mathbf{0}$ za vsak $v \in V$.*

Za vektorje $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ in skalarje $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ imenujemo vektor

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

linearna kombinacija vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Denimo, ničelni vektor $\mathbf{0} = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_n$ je linearna kombinacija poljubnih vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Linearno kombinacijo z izključno ničelnimi koeficienti imenujemo *trivialna* linearna kombinacija.

2. Vektorski podprostor

Če je podmnožica U vektorskega prostora V

(VPP1) zaprta za seštevanje ($u, v \in U \Longrightarrow u + v \in U$) in

(VPP2) zaprta za množenje vektorjev z realnimi števili ($v \in U$, $\alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha v \in U$),

potem jo imenujemo *vektorski podprostor* prostora V.

Izrek 2. *Podmnožica U vektorskega prostora V je vektorski podprostor natanko tedaj, ko je poljubna linearna kombinacija $\alpha u + \beta v$ vektorjev $u, v \in U$ tudi vsebovana v U.*

Vsak vektorski podprostor po (VPP2) vsebuje tudi vektor $0 \cdot v = \mathbf{0}$. Zatorej podmnožica vektorskega prostora, ki ne vsebuje ničelnega vektorja, ne more biti vektorski podprostor.

Ker lastnosti (VP1)-(VP7) veljajo za poljubne elemente vektorskega prostora V, veljajo tudi za vse elemente vektorskega podprostora U v V. Poleg tega je vektorski podprostor po definiciji zaprt za seštevanje in množenje s števili. Zatorej je vsak vektorski podprostor hkrati tudi vektorski prostor.

Linearna ogrinjača $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$ je množica vseh linearnih kombinacij vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Ker je linearna kombinacija linearnih kombinacij vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ zopet linearna kombinacija vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$, je po Izreku 2 linearna ogrinjača $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ linearni podprostor v V. Pravimo, da vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *napenjajo* prostor $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Ne le, da je linearna ogrinjača vektorski prostor. Velja celo več.

Izrek 3. *Linearna ogrinjača vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorskega prostora V je najmanjši vektorski podprostor v V, ki vsebuje vektorje $v_1, v_2, \ldots, v_n$.*

3. Baza vektorskega prostora

Vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ so *linearno odvisni*, ko obstaja vektor v_k, ki je linearna kombinacija ostalih $v_1, v_2 \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n$:

$$v_k = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \alpha_n v_n,$$

kjer $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ so *linearno neodvisni*, če niso linearno odvisni. Ekvivalentno, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ so linearno neodvisni, če je njihova trivialna linearna kombinacija edina njihova linearna kombinacija, ki je enaka ničelnemu vektorju $\mathbf{0}$. Z drugimi besedami, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ so linearno neodvisni, če iz

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}$$

sledi

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Če množica vektorjev vsebuje ničelni vektor $\mathbf{0}$, potem lahko ničelni vektor izrazimo kot trivialno linearno kombinacijo ostalih vektorjev. Zato je vsaka množica, ki vsebuje ničelni vektor, linearno odvisna.

Naj vektorji $u_1, u_2, \ldots, u_m$ napenjajo vektorski prostor $V = \mathcal{L}\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$. Če so $u_1, u_2, \ldots, u_m$ linearno odvisni, potem obstaja podmnožica $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, ki prav tako napenja prostor V. Najmanjšo takšno podmnožico bomo imenovali *baza* vektorskega prostora. Dobimo jo tako, da iz množice $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ izberemo čim manj vektorjev (torej bodo linearno neodvisni), a bodo še vedno napenjali prostor V.

Množica vektorjev $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ je *baza* vektorskega prostora V, če

(B1) so $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linearno neodvisni in
(B2) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ napenjajo prostor V.

Izrek 4. *Vsak vektorski prostor ima nešteto baz. Vse baze vektorskega prostora imajo enako število vektorjev.*

Dimenzija prostora V je enaka moči (poljubne) baze prostora V. Označimo jo z $\dim V$.

Izrek 5. *Za vsako bazo vektorskega prostora V je zapis poljubnega vektorja $v \in V$ kot linearna kombinacija baznih vektorjev vedno enoličen.*

4. Nadaljnje branje

ϟ (1) David Poole, Linear algebra, a modern introduction, Thomson, 2006, Podpoglavji 6.1 in 6.2.
ϟ (2) Tomaž Košir, Linearna algebra, poglavje VI: Vektorski prostori.

5. Domača naloga

ϟ (1) Rešite kviz na Učilnici.
ϟ (2) Drži ali ne drži?
  - (a) Množica vseh zgornje trikotnih $n \times n$ matrik vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{n\times n}$.
  - (b) Množica vseh 3×3 matrik z vsemi diagonalnimi elementi enakimi 0 je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{3\times 3}$.
  - (c) Množica vseh 4×4 matrik, ki imajo vse vrstice enake, je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{4\times 4}$.
  - (d) Ravnina v $\mathbb{R}^3$, podana z enačbo $x + 2y + 3z = 4$, je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$.
  - (e) Če so $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ linearno odvisno vektorji, potem je linearna ogrinjača $\mathcal{L}\{x, y, z\}$ ravnina v $\mathbb{R}^3$ skozi koordinatno izhodišče.

(f) Če je $\{v_1, v_2, \dots, v_7\}$ ortogonalna množica v vektorskem prostoru V dimenzije 7 in v_i neničelni vektorji, potem je $v_1, v_2, \dots, v_7\}$ baza prostora V.
(g) Vsaka linearno neodvisna množica vektorjev v vektorskem prostoru dimenzije 9 vsebuje vsaj 9 elementov.
(h) Vsaka baza prostora $\mathbb{R}^{2\times 4}$ ima največ 4 elemente.
(i) Če je U linearna ogrinjača vektorjev $v_1, v_2, \dots, v_k$, potem vektorji $v_1, v_2, \dots, v_k$ tvorijo bazo prostora U.

$\lightning$ (3) Katere od naslednjih množic realnih $n \times n$ matrik so vektorski podprostori v $\mathbb{R}^{n\times n}$? Za vsak podprostor določite tudi bazo.
(a) Matrike, ki imajo prvo vrstico ničelno.
(b) Matrike, ki imajo vsoto elementov v vsaki vrstici enako 1.
(c) Vse matrike C, za katere velja $C^2 = I$.
(d) Vse matrike D, ki so rešitve sistema $D\vec{x} = 0$. Bazo določite le v posebnem primeru, ko je $n = 2$ in $\vec{x} = [1\ 2]^\mathsf{T}$.
(e) Vse matrike, katerih elementi so nenegativna realna števila.
(f) Vse matrike F, za katere velja $F = F^T$.
(g) Vse matrike G, za katere velja $G = -G^T$.
(h) Vse matrike H, za katere velja $\operatorname{rank} H = n$.
(i) Vse matrike, katerih vse vrstice so med seboj enake.
(j) Vse matrike X, katerih produkt z vnaprej dano matriko J je enak ničelni matriki. Bazo določite le v posebnem primeru, ko je $n = 2$ in $\vec{J} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

$\lightning$ (4) Naj bo V vektorski prostor ter $U, W \subseteq V$ vektorska prostora v V. Pokažite, da je tudi $U \cap W$ vektorski prodprostor v V.

$\lightning\lightning$ (5) Pokažite Izrek 1.

$\lightning$ (6) Naj $\mathcal{C}[0, 2\pi]$ označuje vektorski prostor vseh zveznih funkcij na intervalu $[0, 1]$. Pokažite, da so vektorji

$$f(x) = 1,\ g(x) = \cos(2x),\ h(x) = \cos^2 x,$$

linearno odvisni v $\mathcal{C}[0, 1]$.

$\lightning\lightning$ (7) Naj bo $\mathcal{V}$ množica vseh simetričnih matrik oblike

$$\begin{bmatrix} A & S \\ -S & A \end{bmatrix},$$

kjer je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična matrika ($A^\mathsf{T} = A$), $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pa poševno simetrična ($S^\mathsf{T} = -S$).
(a) Pokažite so, da je $\mathcal{V}$ vektorski prostor.
(b) Poiščite bazo prostora $\mathcal{V}$ in določite $\dim \mathcal{V}$.
(c) Dokažite, da je karakteristični polinom vsake matrike v $\mathcal{V}$ kvadrat.

$\lightning$ (8) David Poole, Linear algebra, a modern introduction, Thomson, 2006, stran 446 (Exercises 24-50), strani 460-463 (Exercises 1-58).

(Naloge, označene s ↯ preverjajo razumevanje osnovnih pojmov in so primeri nalog s teoretičnih izpitov. Naloga, označena s ↯↯ je nekolika težja.)