Matematika 1	**Izročki: 10. teden**

Optimizacija. 1. del.

Polona Oblak

1. Klasifikacija lokalnih ekstremov

Naj bo $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ter a v definicijskem območju funkcije f.

Če za vse točke $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$, ki so "dovolj blizu"točke a (tj. $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \varepsilon$ za nek dovolj majhen ε) velja $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$, potem pravimo, da ima funkcija f v točki a *lokalni maksimum*.

Če za vse točke $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$, ki so "dovolj blizu"točke a (tj. $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \varepsilon$ za nek dovolj majhen ε) velja $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a})$, potem pravimo, da ima funkcija f v točki a *lokalni minimum*.

Če je funkcija f zvezno parcialno odvedljiva, potem je jasno, da ima lahko lokalne ekstreme le v stacionarnih točkah. Torej je potreben pogoj za lokalni ekstrem funkcije f v točki a:

$$(\operatorname{grad} f)(\mathbf{a}) = \mathbf{0},$$

kar pomeni, da moramo lokalne ekstreme iskati zgolj med stacionarnimi točkami.

Izrek 1. *Naj bo* a *stacionarna točka dvakrat parcialno zvezno odvedljive funkcije* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*.*

1. *Če so vse lastne vrednosti matrike* $H_f(\mathbf{a})$ *pozitivne, ima* f *v* a *lokalni minimum.*
2. *Če so vse lastne vrednosti matrike* $H_f(\mathbf{a})$ *negativne, ima* f *v* a *lokalni maksimum.*
3. *Če so vse lastne vrednosti matrike* $H_f(\mathbf{a})$ *neničelne, vendar različno predznačene, lokalnega ekstrema v* a *ni.*
4. *Če je kakšna od lastnih vrednosti matrike* $H_f(\mathbf{a})$ *enaka* 0*, o lokalnih ekstremih funkcije* f *v točki* a *iz matrike* $H_f(\mathbf{a})$ *ne moremo sklepati.*

2. Lokalni ekstremi

Pogosto naletimo na problem iskanja ekstremalnih vrednosti funkcije $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pri pogojih

$$g_1(\mathbf{x}) = g_2(\mathbf{x}) = \ldots = g_m(\mathbf{x}) = 0.$$

Izkaže se, da lahko lokalni ekstremi funkcije f pri pogojih $g_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, nastopijo le v stacionarnih točkah funkcije

$$L = f - \lambda_1 g_1 - \cdots - \lambda_m g_m,$$

ki je funkcija $n+m$ spremenljivk x_1, x_2, ..., x_n, λ_1, λ_2, ..., λ_m.

Funkciji L pravimo *Lagrangeova funkcija*, novim spremenljivkam λ_1, λ_2, ..., λ_m pa *Lagrangevi multiplikatorji*.

Omenjeni pogoj ni zadosten. Nekatere kritične točke funkcije L so ekstremalne točke funkcije $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pod pogoji $g_1(\mathbf{x}) = g_2(\mathbf{x}) = \ldots = g_m(\mathbf{x}) = 0$, ostale pa ne.

3. Nadaljnje branje

(1) James Stewart, Calculus, early transcendentals, 2016, Razdelek 14.8.
(2) Wolfram Demonstrations: The Geometry Of Lagrange Multipliers.

4. Domača naloga

↯ (1) Rešite kviz na Spletni učilnici.

↯ (2) James Stewart, Calculus, early transcendentals, 2016, strani 940-941, vse naloge.

↯ (3) Naj bo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija treh spremeljivk. Za vsako od točk $P, R \in \mathbb{R}^3$ določite in utemeljite, ali sta lokalni minimum, lokalni maksimum, ali nista ekstremalni točki ali pa iz danih podatkov ne moremo ugotoviti, katerega tipa sta točki.
- (a.) $f_x(P) = f_y(P) = f_z(P) = 0$, $f_{xx}(P) = 3, f_{yy}(P) = -1, f_{xy}(P) = 0$.
- (b.) $f_x(R) = f_y(R) = f_z(R) = 1$, $f_{xx}(R) = f_{yy}(R) = f_{zz}(R) = 1, f_{xy}(R) = f_{yz}(R) = f_{xz}(R) = 0$.

↯ (4) Ali obstaja takšna dvakrat zvezno odvedljiva funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, da je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 4, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2,$$

in ima v točki $(x, y) = (0, 0)$
- (a) lokalni minumum? (Če da, zapišite primer. Če ne, razložite, zakaj ne.)
- (b) lokalni maksimum? (Če da, zapišite primer. Če ne, razložite, zakaj ne.)

(Naloge, označene s ↯ preverjajo razumevanje osnovnih pojmov in so primeri nalog s teoretičnih izpitov.)