② Vektorski prostori

$\mathbb{R}^2$ $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ $\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}, \alpha \vec{x} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{bmatrix}$

Pazi! Ni nujno $x \in \mathbb{R}^n$...

Def:

(Abstraktni realni) vektorski prostor je množica objektov (ki jih imenujemo vektorji) skupaj z notranjima operacijama:

- seštevanje (+) $(u, v \in V \Rightarrow u + v \in V)$
- množenje s skalarjem iz $\mathbb{R}$ (ali brez) $(u \in V, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha u \in V)$

in naslednjimi lastnostmi:

1. $(u+v)+z = u+(v+z)$ asociativnost
   $u+v = v+u$ komutativnost
2. Obstaja ničelni element 0, za katerega velja $u+0 = 0+u = 0$
3. Za vsak element u obstaja $(-u)$, za katerega velja $u+(-u) = (-u)+u = 0$
4. $\alpha(\beta u) = \beta(\alpha u) = (\alpha\beta)u$
5. $1 \cdot u = u$ nevtralni element za množenje
6. $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$ distributivnost
   $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

za $\forall u, v, z \in V$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Primeri:

1. $\mathbb{R}^n$ (vektorji skupaj s $+$ po komponentah in $\cdot$ s skalarjem po komponentah)

   $0 = \vec{0}$ $\quad -\vec{x} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix}$

2. $\mathbb{R}^{m \times n}$ (matrike, $+$ po komponentah $\cdot$ s skalarjem po komponentah)

   $0 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ $\quad -X = \begin{bmatrix} -x_{11} & \cdots & -x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_{n1} & \cdots & -x_{nn} \end{bmatrix}$

3. $\mathbb{R}_n[x]$ (polinomi ene spremenljivke z realnimi koeficienti stopnje največ n)

je vektorski prostor

$0 \ldots \; p(x) = 0$ za $\forall x$

$-p \ldots \; (-p)(x) = -p(x)$ pomnožimo vse koef z (-1)

Če imamo [illegible] podmnožico [illegible] prostor [illegible] da preverimo, da sta $+$ in $\cdot$ s skalarjem notranja operacija

Def:

Če za neko podmnožico U vektorskega prostora V velja:

1. Seštevanje je notranja operacija v U
   $(u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 + u_2 \in U)$
2. Množenje s skalarjem je notranja operacija v U
   $(u \in U, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha u \in U)$

pravimo, da je U **vektorski podprostor** v V.

(In po $\boxed{2}$ je $0 \in U$ in $(-u) \in U$ za $\forall u \in U$)

+ notranja operacija ⇒ VPP je zaprt za seštevanje
• s skalarjem -||- ⇒ VPP -||- za mn. s skalarjem

Def:

Za elemente $v_1, \dots, v_n$ vektorskega prostora V pravimo, da je

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$

linearna kombinacija $v_1, \dots, v_k$ za $\forall \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Trditev: $U \subseteq V$ je vektorski podprostor, ko je $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in U$ za $\forall u_1, u_2 \in U$ in $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Dokaz: U je VPP ⇒ za vsaka $u_1, u_2 \in U$ (⇒)

$\alpha_1 u_1 \in U$, $\alpha_2 u_2 \in U$

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in U$

(⇐)

Če za $\forall u_1, u_2 \in U$ velja $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in U$, potem je

$$\left.\begin{array}{ll} (\alpha_1 = \alpha_2 = 1) & u_1 + u_2 = U \\ (\alpha_2 = 0) & \alpha_1 u \in U \end{array}\right\} U \text{ je VPP}$$

Primer: Naj bo $\vec{a}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$ in $U\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ množica vseh matrik X, za katere velja $\vec{a}^T X\vec{a}=0$.

a) Pokažimo, da je U VPP v $\mathbb{R}^{2\times2}$.

$\boxed{1}$ $X,Y\in U$ Pokazati moramo, da $X+Y\in U$.

$$X,Y\in U \Rightarrow \vec{a}^T X\vec{a}=0 \text{ in } \vec{a}^T Y\vec{a}=0$$
$$\vec{a}^T(X+Y)\vec{a}=\vec{a}^T X\vec{a}+\vec{a}^T Y\vec{a}=0+0=0 \Rightarrow X+Y\in U$$

$\boxed{2}$ $X\in U$ Pokazati moramo, da $\alpha X\in U$

$$X\in U \Rightarrow \vec{a}^T X\vec{a}=0$$
$$\vec{a}(\alpha X)\vec{a}=\alpha(\vec{a}^T X\vec{a})=\alpha\cdot 0=0 \Rightarrow \alpha X\in U$$

Iz $\boxed{1}$ in $\boxed{2}$ sledi, da je U VPP v $\mathbb{R}^{2\times2}$.

Def: Za $v_1,\dots,v_k\in V$ imenujemo

množica vseh linearnih kombinacij

$$\mathcal{L}\{v_1,\dots,v_k\}=\{\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_k v_k \,;\, \alpha_n\in\mathbb{R}\}$$

linearna ogrinjača vektorjev $v_1,\dots,v_k$.

najmanjši možen izbor vektorjev (noben ni lin. k. ostalih)

Def: Če za vektorje $v_1,\dots,v_k$ velja, da nobenega ne moremo izraziti kot lin. kombinacijo ostalih, pravimo, da so linearno neodvisni.

Def: Vektorji $v_1, \dots, v_k$ so linearno odvisni, če niso linearno neodvisni.

Kako preverimo, ali so neki A, B, C lin. neodvisni?

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$$

$$\alpha \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} -2\alpha - 2\beta - 4\gamma &= 0 \\ \alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{aligned}\right\} \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$\Downarrow$

A, B, C so lin. neodvisni

Def: $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ so baza VP V, če

① $\mathcal{L}\{b_1, \dots, b_n\} = V$

Vsak element V je lin. kombinacija baznih elementov

② $b_1, \dots, b_n$ linearno neodvisni

Noben b ni linearna kombinacija drugega

Dejstva:

1. Vsak VP ima bazo. Baz je neskončno.
2. Vse baze VP V imajo enako število elementov. Število elementov baze imenujemo dimenzija V.

Primeri:

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}^n$ $\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$

so lin. neodvisni => baza → standardna!

$\mathcal{S} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ je standardna baza $\mathbb{R}^n$

($\vec{e}_k$ ima vse elemente 0, razen na k-tem mestu je 1)

$\boxed{2}$ Podobno:

Standardna baza $\mathbb{R}^{m \times n}$

$\mathcal{S} = \{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1N}, E_{21}, \dots, E_{MN}\}$

Dimenzija: $M \times N$

$\boxed{3}$ $\mathbb{R}_n[x] = \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 ; a_i \in \mathbb{R}\}$

Standardna baza: $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

$\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$