② Schurov izrek

$A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sta si ortogonalno podobni, kadar obstaja ortogonalna Q, da

$$A = QBQ^{-1} \text{ (ali } T\text{)}$$

ni še Schurov

ekvivalenčna relacija

ekv. razredi

Izrek (Schur)

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ z realnimi lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Obstajata:
- ortogonalna matrika $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- zgornje trikotna matrika $Z = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$,

da velja $A = QZQ^T$.

(Vsaka matrika z realnimi lastnimi vrednostmi je ortogonalno podobna zgornje trikotni matriki, ki ima na diagonali lastne vrednosti matrike A)

Ideja dokaza:

Naj bo λ_1 neka lastna vrednost A in u_1 pripadajoči lastni vektor (tj. $A\vec{u}_1 = \lambda_1 \vec{u}_1$) dolžine 1 ($\|\vec{u}_1\| = 1$, $\vec{u}^T u = 1$).

Izberemo vektorje $u_2, \dots, u_n$, da velja $\vec{u}_i^T u_j = 0$ (paroma $\perp$), $\vec{u}_j^T \vec{u}_j = 1$ ($\vec{u}_j$ dolžine 1). (recimo z Gram-Schmidtom)

Nato: $U = \left[\vec u \;\middle|\; \underbrace{\vec u_2 \cdots \vec u_n}_{V \in \mathbb{R}^{n\times n-1}}\right]$ ortogonalna matrika

$= [\vec u \mid V].$

Gram-Schmidt
- vzemo not vektorje (lin. neodv.)
- → GS prvega ga pusti pri miru
- → $\vec u_2$ naredi takega, da je $\perp$ na prvega
- vsak naslednji vektor → odstranimo komponento, ki je lin. odvisna od prej sprocesiranih

$\text{proj}_{\vec b}\vec a = \frac{\vec a \cdot \vec b}{\vec b \cdot \vec b}\vec b$

$A = QZQ^T \to Q^TAQ = Q^TQZQ^TQ = Z$

$$U^TAU = \begin{bmatrix} \vec u_1^T \\ \hline V^T \end{bmatrix} A \left[\vec u_1 \mid V\right] = \begin{bmatrix} \vec u_1^T \\ \hline V^T \end{bmatrix}\left[A\vec u_1 \mid AV\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \vec u_1^TA\vec u_1 & u_1^TAV \\ \hline V^TA\vec u_1 & V^TAV \end{array}\right]$$

$\vec u_1^T \underbrace{A\vec u_1}_{\lambda u_1} = \lambda_1 \underbrace{(\vec u_1^T\vec u_1)}_{1} = \lambda_1$

tako smo izbrali $\vec u_1$

$$V^T\underbrace{A\vec u_1}_{\lambda_1\vec u_1} = \lambda_1 V^T\vec u_1 = \lambda \begin{bmatrix} \vec u_2^T \\ \vdots \\ \vec u_n^T \end{bmatrix}\vec u_1 = \vec 0$$

vsi $\perp$

$$\left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & V^TAV \\ 0 & \end{array}\right]$$

$(n-1)\times(n-1)$ matrika z l.vr. $\lambda_2 \dots \lambda_n$ indukcija

A ima l.vr. $\lambda_1 \dots \lambda_n$, in ker je U^TAU podobna, ima iste. Ker smo λ_1 dobili v kot, ima V^TAV l.vr. $\lambda_2 \dots \lambda_n$.

Opomba: ① Niti Q niti Z nista enolično določena.
② Efektivno ga računamo s QR razcepom matrike A.
③ A je tudi ortogonalno podobna spodnje trikotni matriki

Posledica 1:

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična matrika.

$\Rightarrow A = QZQ^T$, Z je zgΔ.

$A^T = (QZQ^T)^T = QZ^TQ^T$ $\Rightarrow QZQ^T = QZ^TQ^T$ $/Q^T$ z leve

$ZQ^T = Z^TQ^T$ $/Q$ z desne

$Z = Z^T$

$\nabla = \Delta \Rightarrow Z$ je diagonalna

$$Z = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

glej prejšnjo uro

lahko tudi permutiramo položaje

$\boxed{\text{Vsaka simetrična matrika je ortogonalno podobna matriki z l. vrednostmi na diagonali}}$

Posledica 2:

Za vsako $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \dots, \lambda_n (\in \mathbb{R})$ velja

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \quad \text{in} \quad tr(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$$

Dokaz:

$A = QZQ^T$, $Z = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

Q ortogonalna

Ker sta si A in Z podobni, je

$\det(A) = \det(Z) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$

$tr(A) = tr(Z) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$

3 Frobeniusova matrična norma

Definiramo: $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$,

$tr(X) = tr(X^T)$

$$\langle A, B\rangle = \underbrace{tr(A^TB)}_{n\times n} = \underbrace{tr(BA^T)}_{m\times m} = tr((BA^T)^T) = tr(AB^T) =$$
$$= tr(B^TA)$$

Lastnosti:

① $\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$ (simetričnost)

② $\langle \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2, B\rangle \overset{def}{=} tr((\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)^T B) =$

$= tr((\alpha_1 A_1^T + \alpha_2 A_2^T)B) = tr(\alpha_1 A_1^T B + \alpha_2 A_2^T B) =$

$= tr(\alpha_1 A_1^T B) + tr(\alpha_2 A_2^T B) = \alpha_1 tr(A_1^T B) + \alpha_2 tr(A_2^T B) =$

$= \alpha_1 \langle A_1, B\rangle + \alpha_2 \langle A_2, B\rangle$

(linearnost v 1. faktorju) (velja tudi v 2.)

def. matričnega produkta

③ $\langle A, A\rangle = tr(\underset{n\times n}{A^T A}) = \sum_{i=1}^{n} (A^T A)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \underbrace{(A^T)_{ij}}_{a_{ji}} A_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ji}^2 \geq 0$

$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$

torej: $\langle A, A\rangle = 0 \iff A = \vec{0}$ pozitivna definitnost

$\langle A, B\rangle$ imenujemo Frobeniusov skalarni produkt

Definicija: za $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\|A\|_F = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2}$ je Frobeniusova norma matrike A.

$\left\|\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{bmatrix}\right\|_F = \sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2} = \sqrt{30} = \|[1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]^T\|$

$\left(vec(A) = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} \quad A = [A^{(1)} \dots A^{(n)}] \right)$ vektorizacija

$\|A\|_F = \|vec(A)\|$ evklidska (2-) norma

Velja:

$$\|A\|_F^2 = \langle A, A \rangle = tr(\underbrace{A^{T}A}_{n\times n}) = \sum_{i=1}^{n} (l.\text{vrednosti}(A^{T}A))$$

Ponovitev: SVD (razcep singularnih vrednosti)

Če $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

ortogonalna

diagonala: singularne vrednosti A $\sigma_1 \dots \sigma_n$

Uporabno za PCA:  osi

s.v. so različno velike, tiste največje kažejo na veliko varianco v tisti dimenziji

$$\sigma_i = \sqrt{l.vr.(A^{T}A)}$$

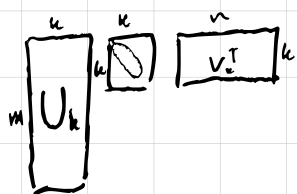
Torej $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{rang A} \sigma_i^2$ kvadrati singularnih vrednosti

Izrek: (Eckhart + Young):

Med vsemi $m\times n$ matrikami ranga $k \leq \min(m,n)$ je "najbližje" matriki A v Frobeniusovi formi.

(B_k poljubna $m\times n$ matrika, rang $B_k = k$:

$\|A - B_k\|_F \geq \|A - A_k\|_F$)



Dokaz: ni (danes)