1. Naj bo T trikotnik, ki ga prvi oktant izreže iz ravnine z enačbo $x+y+z=5$. V kateri točki na tem trikotniku zavzame funkcija $g(x,y,z)=xy^2z^2$ svojo največjo vrednost?
   Rešitev: Največjo vrednost 16 funkcija g zavzame v $P(1,2,2)$.

2. V katerih točkah na območju, ki ga opisuje neenačba
   $$4(x-1)^2+y^2\leq 16,$$
   zavzame funkcija
   $$f(x,y)=2x^2+y^2$$
   največjo in najmanjšo vrednost?
   Rešitev: Največjo vrednost 20 zavzame v točkah $(2,-2\sqrt{3})$ in $(-2,2\sqrt{3})$, najmanjšo 0 pa v točki $(0,0)$.

3. Poišči tiste točke na elipsi z enačbo
   $$x^2-xy+y^2=3,$$
   ki so najbolj oddaljene od koordinatnega izhodišča.
   Rešitev: Od izhodišča sta najbolj oddaljeni točki $(-\sqrt{3},-\sqrt{3})$ in $(\sqrt{3},\sqrt{3})$.

4. Katere točke na implicitno dani krivulji z enačbo
   $$(x^2+y^2)^2=x^3+y^3$$
   so najbolj oddaljene od koordinatnega izhodišča? Katere so najbolj oddaljene od y-osi?
   Rešitev: Od izhodišča sta najbolj oddaljeni točki $T_1(0,1)$ ter $T_2(1,0)$. Od y-osi je najbolj oddaljena točka $T_2(1,0)$.

5. Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x,y)=xy-x+y-1$
   (a) na krogu danem z $x^2+y^2\leq 2$,
   (b) na polkrogu danem z $x^2+y^2\leq 2$ in $y\geq 0$.

   Rešitev: (a) Največja vrednost je $1/2$, najmanjša vrednost pa -4.
   (b) Največja vrednost je $1/2$, najmanjša vrednost pa $-1-\sqrt{2}$.

6. Elipsoid v $\mathbb{R}^3$ je dan z enačbo
   $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$
   Kvader, katerega robovi so vzporedni osem x, y in z, včrtamo v ta elipsoid.
   (a) Kolikšna je največja možna prostornina včrtanega kvadra?
   (b) Kolikšna je največja možna površina včrtanega kvadra?

   Rešitev: (a) Največja možna prostornina je $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.
   (b) Poskusite izpeljati, da je parameter λ iz metode Lagrangeevih množiteljev lastna vrednost matrike
   $$L=2\begin{bmatrix}0 & a^2 & a^2\\ b^2 & 0 & b^2\\ c^2 & c^2 & 0\end{bmatrix},$$
   komponente lastnega vektorja $[x,y,z]^{\mathsf{T}}$ te matrike, ki zadoščajo enačbi elipsoida, pa določajo preostanek rešitve.

7. Imamo ℓ metrov dolgo tanko palico. Razrežemo jo na 12 krajših palic, iz katerih lahko sestavimo ogrodje kvadra.

   (a) Na kako dolge kose moramo palico razrezati, da bo dobljeno ogrodje kvadra zavzelo največjo možno prostornino?

   (b) Isto vprašanje kot prej, vendar dodatno želimo, da je ploščina osnovne ploskve dobljenega kvadra enaka A.

   Rešitev: (a) Palico moramo razrezati na 12 *enako dolgih* kosov, iz njih sestavimo ogrodje kocke.
   (b) Odrežemo 8 kosov dolžine $\sqrt{A}$, preostanek palice pa razrežemo na 4 enako dolge kose.

8. Iz ℓ metrov dolge tanke palice želimo sestaviti ogrodje tristrane prizme (osnovna ploskev naj bo enakostranični trikotnik).

   (a) Na kako dolge kose moramo palico razrezati, da bo dobljeno ogrodje kvadra zavzelo največjo možno prostornino?

   (b) Na kako dolge kose moramo palico razrezati, da bo imela dobljena prizma največjo možno površino?

   Rešitev: (a) Palico moramo razrezati na 9 *enako dolgih* kosov.
   (b) Tako: 6 kosov za stranice dveh enakostraničnih trikotnikov z dolžino $a = \frac{\ell}{66}(6+\sqrt{3})$ in 3 kose za višino prizme z dolžino $v = \frac{\ell}{33}(5-\sqrt{3})$.

9. Za $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ naj bo $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{a})(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{b})$. Izračunaj

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \quad \text{in} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2}.$$

   Rešitev: $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathbf{a}\mathbf{b}^\mathsf{T} + \mathbf{b}\mathbf{a}^\mathsf{T})$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2} = \mathbf{a}\mathbf{b}^\mathsf{T} + \mathbf{b}\mathbf{a}^\mathsf{T}$.

10. Poišči tisti vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, za katerega je vsota kvadratov razdalj do vektorjev $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ najmanjša možna.
    Rešitev: $\mathbf{x} = \frac{1}{k}(\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_k)$.

11. Naj bo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $d \geq 0$ pa dano realno število.

    (a) Poišči največjo oz. najmanjšo vrednost izraza $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x}$, če je $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor s predpisano dolžino; $\|\mathbf{x}\| = d$.

    (b) Geometrijsko utemelji zgornjo rešitev.

    Rešitev: (a) $\pm d\|\mathbf{a}\|$.

12. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, d pa pozitivno realno število.

    (a) Poišči največjo in najmanjšo vrednost $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}A\mathbf{x}$ pri pogoju $\|\mathbf{x}\| = d$.

    (b) Poišči največjo in najmanjšo vrednost $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ pri pogoju $\mathbf{x}^\mathsf{T}A\mathbf{x} = d^2$, če je A simetrična in pozitivno definitna.

Rešitev: (a) $\frac{\lambda_{\max} d^2}{2}$ in $\frac{\lambda_{\min} d^2}{2}$, kjer sta $\lambda_{\max}$ in $\lambda_{\min}$ največja in najmanjša lastna vrednost matrike $A + A^\mathsf{T}$.
(b) $\frac{d^2}{\lambda_{\max}}$ in $\frac{d^2}{\lambda_{\min}}$, kjer sta $\lambda_{\max}$ in $\lambda_{\min}$ največja in najmanjša lastna vrednost matrike A.

13. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ter $d > 0$ realno število.

    (a) Poišči najmanjšo vrednost funkcije $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ pri pogoju $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \leq d$.

    (b) Poišči najmanjšo vrednost funkcije $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ pri pogoju $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

    (c) Poišči najmanjšo vrednost funkcije $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ pri pogojih $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \leq d$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.