Matematika 1, vaje, 12. 1. 2021

ϟ(11) Naj bodo dani vektorji in matriki

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \vec{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ in } \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Poiščite najmanjšo vrednost funkcije $\vec{x}^{\mathsf{T}} P \vec{x} + \vec{q}^{\mathsf{T}}(\vec{x} + \vec{r})$ pri pogoju, da $\vec{x}$ reši linearni sistem $A\vec{x} = \vec{b}$.

$f(\vec{x}) = \vec{x}^T P \vec{x} + \vec{q}^T(\vec{x}+\vec{r})$ pri pogoju $A\vec{x} = \vec{b}$ ... $\underbrace{A\vec{x} - \vec{b}}_{\vec{g}(\vec{x})} = \vec{0}$

$$L(\vec{x},\vec{\lambda}) = f(\vec{x}) - \vec{\lambda}^T \vec{g}(\vec{x}) =$$

$$= \vec{x}^T P \vec{x} + \vec{q}^T(\vec{x}+\vec{r}) - \vec{\lambda}^T(A\vec{x} - \vec{b})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = \vec{x}^T(P+P^T) + \vec{q}^T - \vec{\lambda}^T A = \vec{0}^T \Big/^T \ldots \quad (P+P^T)\vec{x} + A^T\vec{\lambda} = -\vec{q}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{\lambda}} = -(A\vec{x} - \vec{b}) = \vec{0} \ \ldots\ldots \quad A\vec{x} = \vec{b}$$

Torej: $\begin{bmatrix} P+P^T & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{q} \\ \vec{b} \end{bmatrix}$, $\vec{x}$ - komponente rešitve tega linearnega sistema vstavimo v f.

V našem primeru je

$$\begin{bmatrix} P+P^T & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} -\vec{q} \\ \vec{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rešitev je (preveri) $\begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, torej $\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Najmanjša vrednost f je torej:

$$f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = [-1,1,0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + [0,1,1]\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \underline{6}.$$

10. Poišči tisti vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, za katerega je vsota kvadratov razdalj do vektorjev $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ najmanjša možna.

Rešitev: $\mathbf{x} = \frac{1}{k}(\mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_k)$

$$\underbrace{\|\vec{x}-\vec{a}_1\|^2}_{(\vec{x}-\vec{a}_1)^T(\vec{x}-\vec{a}_1)} + \|\vec{x}-\vec{a}_2\|^2 + \dots + \underbrace{\|\vec{x}-\vec{a}_k\|^2}_{(\vec{x}-\vec{a}_k)^T(\vec{x}-\vec{a}_k)} = f(\vec{x}) \leftarrow \text{iščemo minimum}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = \operatorname{grad} f = \underbrace{(2\vec{x}^T - 2\vec{a}_1^T) + (2\vec{x}^T - \vec{a}_2^T) + \dots + (2\vec{x}^T - 2\vec{a}_k^T)}_{2k\vec{x}^T - 2(\vec{a}_1^T + \vec{a}_2^T + \dots + \vec{a}_k^T)} = \vec{0}^T$$

$$\frac{\partial \overbrace{(\vec{x}-\vec{a}_i)^T(\vec{x}-\vec{a}_i)}^{\vec{x}^T\vec{x} - 2\vec{a}_i^T\vec{x} + \vec{a}_i^T\vec{a}_i}}{\partial \vec{x}} = 2\vec{x}^T - 2\vec{a}_i^T$$

Torej $\cancel{2}k\vec{x}^T = \cancel{2}(\vec{a}_1^T + \vec{a}_2^T + \dots + \vec{a}_k^T) \;/ : k$

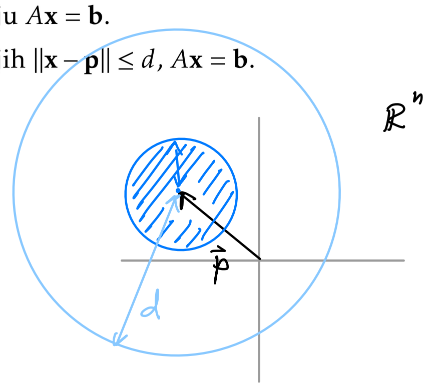
$$\underline{\vec{x} = \frac{1}{k}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_k).}$$

13. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ter $d > 0$ realno število.

(a) Poišči najmanjšo vrednost funkcije $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ pri pogoju $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \le d$.

(b) Poišči najmanjšo vrednost funkcije $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ pri pogoju $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(c) Poišči najmanjšo vrednost funkcije $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ pri pogojih $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \le d$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.



(a) • V notranjosti: kandidati so lokalni ekstremi f:

$$f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^2 = \vec{x}^T\vec{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = 2\vec{x}^T = \vec{0}^T \dots \vec{x} = \vec{0} \quad (\text{ta je v območju, če je } \|\vec{p}\| < d, \text{ sicer ni})$$

• Na robu: vezani ekstremi: $\|\vec{x}-\vec{p}\| = d \dots \|\vec{x}-\vec{p}\|^2 = d^2 \dots \|\vec{x}-\vec{p}\|^2 - d^2 = 0$

$$L(\vec{x}, \lambda) = f(\vec{x}) - \lambda(\|\vec{x}-\vec{p}\|^2 - d^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = 2\vec{x}^T - \lambda(2\vec{x}^T - 2\vec{p}^T) = \vec{0} \dots (2-2\lambda)\vec{x} = -2\lambda\vec{p}, \text{ tj. } \vec{x} \parallel \vec{p}$$

oz. $\vec{x} = \alpha\vec{p}$ (ali $\vec{x} = \frac{2\lambda}{2\lambda-2}\vec{p}$)

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(\|\vec{x}-\vec{p}\|^2 - d^2) = 0$$

$$\|\alpha\vec{p} - \vec{p}\|^2 - d^2 = 0 \dots \|(\alpha-1)\vec{p}\| = d \dots |\alpha-1|\cdot\|\vec{p}\| = d$$

$$\alpha = 1 \pm \frac{d}{\|\vec{p}\|} \Leftarrow \alpha - 1 = \pm\frac{d}{\|\vec{p}\|} \Longleftarrow |\alpha - 1| = \frac{d}{\|\vec{p}\|}$$

Torej $f(\alpha\vec p) = f\left(\left(1 \pm \frac{d}{\|\vec p\|}\right)\vec p\right) = \left|1 \pm \frac{d}{\|\vec p\|}\right|^2 \cdot \|\vec p\|^2 =$

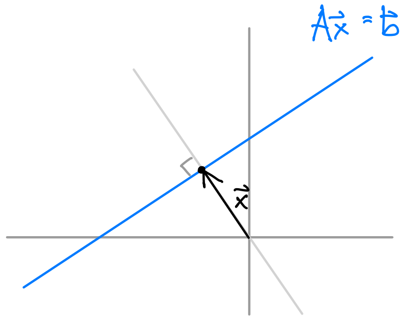
$$= \left(1 + \frac{d^2}{\|\vec p\|^2} \pm 2\frac{d}{\|\vec p\|}\right)\cdot \|\vec p\|^2 = \|\vec p\|^2 + d^2 \pm 2d\|\vec p\|.$$

(b) Z Lagrangeovo metodo: $(A\vec x = \vec b \dots A\vec x - \vec b = \vec 0)$

$$L(\vec x, \vec\lambda) = \|\vec x\|^2 - \vec\lambda^T(A\vec x - \vec b) \qquad 2\vec x^T = \vec\lambda^T A$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec x} = 2\vec x^T - \vec\lambda^T A = \vec 0^T \,\Big/^T \dots \underbrace{\vec x = \frac{1}{2}A^T\vec\lambda}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec\lambda} = -(A\vec x - \vec b) = \vec 0 \dots A\vec x = \vec b \dots \frac{1}{2}AA^T\vec\lambda = \vec b$$



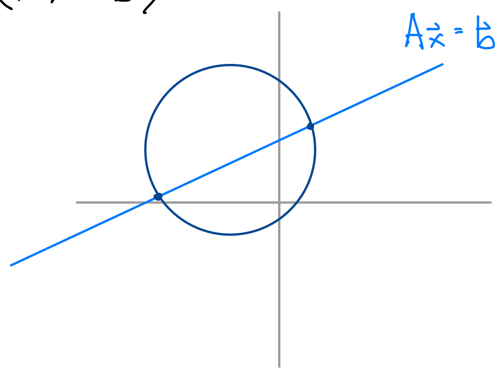
Če je A polnega ranga, $\vec\lambda = 2(AA^T)^{-1}\vec b$.

Torej: $\vec x = \frac{1}{2}A^T\vec\lambda = A^T(AA^T)^{-1}\vec b$.

V splošnem (za A, ki mogoče ni polnega ranga) dobimo $\vec x = A^+\vec b$, kjer je A^+ Moore-Penroseov posplošeni inverz A.

(c) • Spet z Lagrangeovo metodo (za rob dan z $\|\vec x - \vec p\| = d$ in $A\vec x = \vec b$):

$$L(\vec x, \mu, \vec\lambda) = \|x\|^2 - \mu\left(\|\vec x - \vec p\|^2 - d^2\right) - \vec\lambda^T(A\vec x - \vec b)$$



$$\frac{\partial L}{\partial \vec x} = 2\vec x^T - 2\mu(\vec x - \vec p)^T - \vec\lambda^T A = \vec 0^T \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = -\left(\|\vec x - \vec p\|^2 - d^2\right) = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec\lambda} = -(A\vec x - \vec b) = \vec 0 \qquad (3)$$

(1)... $(2-2\mu)\vec x = A^T\vec\lambda - 2\mu\vec p \dots \vec x = \frac{1}{2-2\mu}\left(A^T\vec\lambda - 2\mu\vec p\right)$

Vstavimo v (3): $A\left(A^T\vec\lambda - 2\mu\vec p\right) = (2-2\mu)\vec b$

$AA^T\vec\lambda = (2-2\mu)\vec b + 2\mu A\vec p \dots \vec\lambda = (AA^T)^{-1}\left((2-2\mu)\vec b + 2\mu A\vec p\right)$

$$\text{vstavimo } \lambda \text{ s prejšnje strani}$$

$$\text{Torej } \vec{x} = \frac{1}{2-2\mu}\left(A^T\vec{\lambda} - 2\mu\vec{p}\right) = \frac{1}{2-2\mu}\left(A^T\left((AA^T)^{-1}\left((2-2\mu)\vec{b} + 2\mu A\vec{p}\right)\right) - 2\mu\vec{p}\right) =$$

$$= \frac{1}{2-2\mu}\left((2-2\mu)\,A^T(AA^T)^{-1}\vec{b} + 2\mu\left(A^TA\vec{p} - \vec{p}\right)\right) =$$

$$\vec{x} = A^T(AA^T)^{-1}\vec{b} + \frac{\mu}{1-\mu}\left(A^TA - I\right)\vec{p}$$

To sedaj vstavimo v (2) oz. $\|\vec{x} - \vec{p}\| = d$: .....

.... je konec blizu? Ugotovi samostojno! ✓